

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2026

Fiche TD n°7 ,

ESPACES VECTORIELS

Exercice 1.

- a) Décomposer le vecteur $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ dans la base standard de \mathbb{R}^2 , puis dans la base $b_1 = (2, 1)$, $b_2 = (1, -3)$, c'est-à-dire déterminer les coefficients λ_k unique tel que $v = \sum_{k=1}^2 \lambda_k b_k$.
- b) Soit (b_1, \dots, b_n) une base de \mathbb{R}^n . Montrer que la décomposition d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ dans cette base aboutit à résoudre un système linéaire de la forme $Ax = b$. (En particulier, spécifier la matrice A et les vecteurs x et b).

Exercice 2.

- a) Montrer que la famille $((1, 2, 3); (4, 5, 6))$ est libre et la compléter en une base de \mathbb{R}^3 .
- b) De même pour la famille suivante : $((1, 2, 3); (2, 4, 3))$.
- c) Montrer que la famille $((1, 1, 1, 1); (2, 2, 3, 4))$ est libre et la compléter en une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 3.

- a) Soit $F = \text{Vect}(u, v) \subset \mathbb{R}^3$ avec $u = (1, 2, 3)$ et $v = (4, 5, 6)$. Donner l'équation cartésienne de F .
Indication : Réaliser ceci en utilisant plusieurs méthodes. Une fois en utilisant le produit vectoriel (le plus rapide ici, mais applicable seulement dans \mathbb{R}^3), une autre fois en exigeant $\det(A) = 0$ où A est la matrice que l'on obtient en mettant les vecteurs u, v et (x, y, z) soit comme ses lignes, soit comme ses colonnes. Enfin, d'appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice A et d'exiger que A soit de rang deux.
- b) Soit E l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 . Donner des équations cartésiennes du sous-espace F engendré par $(2, 1, 3, 6)$ et $(-1, 2, 6, -3)$.

Exercice 4.

- a) Montrer que l'ensemble $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel.
- b) Quelle est la dimension de E ? Trouver une base de E .
- c) On note $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices générées par $\{\mathbb{1}_2\}$. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

Exercice 5.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On désigne par \mathcal{P} l'ensemble des fonction paires et par \mathcal{I} l'ensemble des fonctions impaires :

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$$
$$\mathcal{I} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$$

- a) Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{I} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- b) Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
- c) Quelle est la décomposition de la fonction exponentielle ?

Exercice 6.

On considère les sous-espaces de \mathbb{R}^4 suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\} \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t\} \\ H &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = b = c = d\}. \end{aligned}$$

- Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
- Quelle est la dimension de $F + G$? A-t-on $\mathbb{R}^4 = F + G$? $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?
- Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Exercice 7.

On considère les sous-espaces de \mathbb{R}^3 suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\} \\ H &= \{(z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = -z\}. \end{aligned}$$

- Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
- Quelle est la dimension de $F + G$? A-t-on $\mathbb{R}^3 = F + G$? $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?
- Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$.

Exercice 8.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F_1, F_2, F_3 sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(t, -t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_3 := \{(t, 0, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

- Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_3 \cap F_1 = \{0\}$.
- On pose $G = F_1 \oplus F_2$. La somme $G + F_3$ est-elle directe? Justifier votre réponse.

Exercice 9.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension 3, vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 10 (CCF 2022).

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(X^3 - X - 1, X^2 + 1)$$

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Déterminer une base de F .

Indication : Quelles sont les équations à satisfaire pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ telles que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in F$?

- Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 11.

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad (n \geq 0).$$

- Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de E .
- Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de \mathcal{E} .
- Tenant compte du fait que les suites de \mathcal{E} sont univoquement déterminées si on connaît u_0 et u_1 , montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de \mathcal{E} .
- Déterminer la suite de \mathcal{E} telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.