

**ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2026**

**Fiche TD n°6 ,**

**Familles libres, génératrices**

**Exercice 1.**

Étudier la dépendance linéaire des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  suivants :

- a)  $u = (2, -3), v = (-1, 1),$
- b)  $u = (-6, 2), v = (9, -3),$
- c)  $u = (\mu + 1, -1), v = (-3, \mu - 1),$  où  $\mu \in \mathbb{R}.$

**Exercice\* 2.**

- a) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Deux vecteurs  $u, v \in E$  sont dits *parallèles* s'il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tel que  $u = \lambda v$ . Montrer que cette notion de parallélisme est une relation d'équivalence.
- b) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Supposons que nous appelions deux vecteurs  $u, v \in E$  parallèles s'il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u = \lambda v$ . Montrer que cette notion de parallélisme ne serait pas une relation d'équivalence.
- c) Montrer que  $u$  et  $v$  sont liés si et seulement s'ils sont parallèles ou au moins un des deux vecteurs est le vecteur nul  $0 \in E$ .

**Exercice 3.**

Les familles de  $\mathbb{R}^3$  suivantes sont-elles libres ou liées ?

- a)  $u = (2, -3, 2), v = (-1, 1, -2);$
- b)  $u = (-6, 2, 1), v = (9, -3, 1);$
- c)  $u = (-6, 2, 0), v = (9, -3, 0);$
- d)  $u = (10, -5, 15), v = (-4, 2, -6);$
- e)  $u = (1, 0, -1), v = (-1, 1, 0), w = (0, -1, 1);$
- f)  $u = (1, 0, -1), v = (-1, 1, 0), w = (0, -1, 1), z = (1, 1, 1);$
- g)  $u = (2, -3, 2), v = (-1, 1, -2), w = (-1, 4, 4);$
- h)  $u = (2, -3, 2), v = (-1, 1, -2), w = (0, 0, 1);$
- i)  $u = (1, 3, 2), v = (-2, -1, -9), w = (1, 2, 3).$

**Exercice 4.**

Soit  $F := \text{Vect}(u, v)$ , le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $u = (2, -3, 2)$  et  $v = (-1, 1, -2)$ . Parmi les vecteurs suivants, qui appartient à  $F$  ?

- a)  $x = (-1, 4, 4)$
- b)  $y = (0, 0, 1)$
- c)  $z = (1, 2, 3)$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ?

- d)  $F = \text{Vect}(u, v, x)$
- e)  $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u, v, x)$
- f)  $F = \text{Vect}(u, x)$
- g)  $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u, x)$
- h)  $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u, v, x, y, z)$

**Exercice 5.** Soit  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites réelles. Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , on considère la suite

$$u_x = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

On s'intéresse à la famille de suites  $(u_x)_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ . Est elle libre ?

**Exercice 6.** Soit  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On considère la suite de polynômes de Tchebychev définie par :

$$T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X, \quad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

1. Montrer que la famille  $(T_n)_{n \geq 0}$  est libre dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Est-elle génératrice ?