Université Claude-Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2026

Fiche TD n°4,

Calcul matriciel III

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n pour $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Deviner une formule pour $A^n, n \geq 1$ et la montrer par récurrence.

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et $A^3 - A^2 + A - \mathbb{1}_3$.
2. Justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et $\mathbb{1}_3$.

Exercice 3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 4a_n + 3b_n \end{cases}, \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

(a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\binom{a_n}{b_n} = A^n \binom{1}{1}$.
(b) Calculer a_n et b_n explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver le noyau de A.
2. Trouver le conoyau de A.

Exercice 5. Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver le noyau de B.
2. Trouver le conoyau de B.