Université Claude-Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2026

Fiche TD n°2,

Calcul matriciel

Exercice 1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $AB \equiv A \cdot B$, le produit de la matrice A et B. Calculer également BA. Comparer les résultats.
2. Calculer $\operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(B)$, les traces des matrices A et B. Calculer également $\operatorname{tr}(AB)$ et $\operatorname{tr}(BA)$ et comparer.
3. Calculer les matrices transposées des matrices A et B, puis $A^T \cdot B^T$ et $\operatorname{tr}\left(A^T\right)$. Que peut-on remarquer en comparant avec les resultats ?

Exercice 2. On définit les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;
$E = \binom{-1}{3}$; $F = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Parmi les quantités suivantes, dire lesquelles sont bien définies et les calculer :

$$A + B; A + F; A + 2F; F - I_2; AB; BA; BC; CB; DE; AE; EA; AF$$

Exercice 3. Soient A, B, C et D les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Décider lesquelles des sommes $A + B, B + A, A + C, C + A, A + D, D + A, B + C, C + B, B + D, D + B, C + D$ et $D + C$ sont bien définies et les calculer dans ce cas.
2. Décider lesquels des produits $AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD$ et DC sont bien définies et calculer certains d'entre eux dans ce cas.

Exercice 4. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
2. Calculer $(A + B)^2$.
3. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$. Que peut-on remarquer ?
4. Quelle est la formule générale de $(A + B)^2$ pour A et B deux matrices carrées quelconques ?
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ deux matrices telles que $AB = BA$, montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

On rappelle que pour $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et que $0\,! := 1$.

Exercice 5. Trouver A et B des matrices telles que $A \neq \mathbb{0}, B \neq \mathbb{0}$ et $A \cdot B = \mathbb{0}$.

Exercice 6. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner $(AB)_{i,i}$ le coefficient à la ligne i, colonne i de la matrice AB.
2. En déduire la formule de $\mathrm{tr}(AB)$.
3. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
4. En déduire que $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB)$.
5. Si A est inversible. Montrer que $\mathrm{tr}\left(ABA^{-1}\right) = \mathrm{tr}(B)$.
6. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calculer $\mathrm{tr}(ABC)$ et $\mathrm{tr}(BAC)$, que peut-on remarquer ?

Exercice 7. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $N^k = 0$. On rappelle que I désigne la matrice identité de taille n. Répondre aux questions suivantes :

1. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est jamais inversible.
2. Montrer que la matrice $I - N$ est toujours inversible.
   Indication : Montrer que la série $\sum_{j=0}^{k-1} N^j$ est un inverse pour $I - N$, en utilisant le fait que $N^k = 0$. Vous pouvez également utiliser la formule de la somme partielle d'une série géométrique.

Exercice 8. Soit $T = I + \lambda E_{ij}$ une matrice de transvection, où $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \neq j$, et E_{ij} désigne la matrice élémentaire ayant 1 en position (i, j) et 0 ailleurs. Répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que T est inversible et déterminer son inverse.
2. Calculer le produit de 2 transvections.