Université Claude-Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2026

Fiche TD n°1,

SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{l} y + 3z = 5 \\ 2x + 2z = 4 \end{array} \right.$$

Exercice 2. Soient a, b, c, d des réels. Montrez que

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{array} \right.$$

a une unique solution si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants.

$$a) \left\{ \begin{array}{c} -3x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + z = 2 \\ 7x + 5y - 4z = -3 \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{l} y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ x + y = 3 \end{array} \right.$$

Exercice 4. Résoudre les systèmes suivants.

$$a) \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + y & = & 1 \\ -x + z & = & -1 \\ x + y + z & = & 0 \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + y & = & 2 \\ -x + z & = & -1 \\ x + y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

Indication : On remarque la similarité entre les deux systèmes, les résoudre simultanément.

Exercice 5. Résoudre les systèmes suivants.

$$a) \left\{ \begin{array}{c} 2x + 3y + z = 3 \\ x + 4y + 3z = -1 \\ -3x - 2y + z = -7 \\ x - 4y - 5z = 7 \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{c} 2x + 2y - 4z = 2 \\ -2x + 3y + 4z = 3 \\ -3x - 3y + 6z = -3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{array} \right.$$

Exercice 6. Résoudre le système suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{array} \right.$$

Exercice 7. Résoudre les systèmes suivants.

$$a) \left\{ \begin{array}{ccc} -x_2 + 2x_4 + 3x_5 & = & 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_5 & = & 1 \\ 3x_1 - 2x_3 - 7x_4 - 2x_5 & = & -1 \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{ccc} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 3 \\ 3x_1 - 4x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 8. Déterminer un polynôme à coefficients réels P de degré 2 tel que $P(-1) = 0, P(1) = 1$ et $P(2) = 2$.

Exercice 9. On considère trois points $A(1, 2)$, $B(3, -1)$ et $C(k, 4)$.

1. Déterminer la valeur de k pour laquelle ces trois points sont alignés.
2. Vérifier graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 10. (Interpolation et sphère). On se place sur $\mathbb{R}^2$. On rappelle que l'équation d'un cercle de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$ est donnée par :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

1. Montrer que pour tout cercle, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que, le cercle soit d'équation :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

2. Réciproquement, quelles sont les conditions sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $x^2+y^2+ax+by+c = 0$ soit l'équation d'un cercle ?
3. Montrer que par trois points non-alignés passe un unique cercle. (Comment le construire à la règle et au compas ?)
4. Comment ce résultat se généralise-t-il en dimension 3 et plus ?

Exercice 11. (Varignon). On se place sur $\mathbb{C}$ que l'on identifie au plan affine sur $\mathbb{R}$.

1. Soit P_0, P_1 et P_2 trois points. Montrer qu'il existe un triangle $P_0'P_1'P_2'$ tel que P_0, P_1 et P_2 soient les milieux des cotés de ce triangle.
2. Montrer que cela est faux lorsque l'on remplace les triangles par des quadrilatères. C'est à dire si on considère P_0, P_1, P_2, P_3. Montrer qu'il n'existe pas en général de quadrilatère $P_0'P_1'P_2'P_3'$ tel que P_0, P_1, P_2 et P_3 soient les milieux des cotés de ce quadrilatère.
3. Donner une conditions sur le quadrilatère de départ pour que cela soit vrai.
4. Montrer que pour tout polygone $P_0P_1..P_n$ avec n pair, il existe un polygone $P_0'P_1'..P_n'$ dont les milieux des cotés sont $P_0P_1..P_n$.