

## ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2026

### Fiche TD n°9, Applications Linéaires

**Exercice 1.** Soit  $a$  un réel. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

- |   |  |   |
|---|--|---|
| a) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$<br>$(x, y) \mapsto (y, x)$     | d) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$<br>$(x, y) \mapsto (ax, ay)$          | g) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$<br>$(x, y) \mapsto (2x, 0, x - y)$ |
| b) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$<br>$(x, y) \mapsto (x, x + 1)$ | e) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$<br>$(x, y) \mapsto (x + a, y + a)$    | h) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$<br>$x \mapsto \sin x$                  |
| c) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$<br>$(x, y) \mapsto (x, a)$     | f) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$<br>$(x, y, z) \mapsto (x + z, y + z)$ |   |

**Exercice 2.** Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x - y)$ .

- Déterminer  $\ker f$  et  $\text{Im } f$ .
- A-t-on  $\mathbb{R}^2 = \ker f \oplus \text{Im } f$  ?

**Exercice 3.** Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires et déterminer leur noyau et image.

- $\mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $P \mapsto P(2)$
- $\mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$   
 $P \mapsto P \circ P$
- $\mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$   
 $P \mapsto XP'(X)$

**Exercice 4.** On considère  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_3.$$

- Déterminer l'image par  $f$  d'un élément  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer le noyau et l'image de  $f$  et donner une base de chacun d'eux.
- A-t-on  $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \text{Im } f$  ?
- Montrer que  $f \circ f = f$ .

**Exercice 5.** On note  $\Psi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  l'application définie pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , par  $\Psi(P) = P(X + 1) - P(X)$ . (Dans cet exercice il est admis qu'un polynôme qui prend la même valeur sur une infinité de points doit être constant.)

- Montrer que  $\Psi$  est linéaire.
- Déterminer son noyau.
- En déduire le rang de  $\Psi$ .
- Donner une description simple de l'image de  $\Psi$ .
- Calculer  $\text{Im}(\Psi) + \ker(\Psi)$ . Est-ce une somme directe ?

**Exercice 6.** Soit  $f: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n, A \mapsto A + A^T$ .

- Montrer que  $f$  est linéaire.
- Donner une description simple du noyau et de l'image de  $f$ . (De quel ensemble de matrices s'agit-il dans chacun des deux cas ?)
- Calculer  $\text{Im}(f) + \ker(f)$ . Est-ce une somme directe ? A-t-on  $f^2 = f$  ?

**Exercice 7.** On considère les applications  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$  et  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, x \mapsto A^T \cdot x$  où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez le noyau de  $f$  en trouvant une base pour celui-ci.
2. Quel est le rang de  $f$  ?
3. Trouver une base pour son image,  $\text{Im } f$ .
4. Trouver une base pour l'image de  $g$  en appliquant des opérations élémentaires de colonnes à la matrice  $A^T$ .  
*Indication : Comparer avec le point 1.*
5. Trouver une base de  $\text{Im } g$  de manière plus rapide en utilisant le point 2 (et le fait que  $\text{rg } A = \text{rg } A^T$ ).
6. Déterminez le noyau de  $g$  en trouvant une base pour celui-ci.
7. Est-ce que l'on a  $\text{Im } f = \ker g$  et  $\ker f = \text{Im } g$  ?

**Exercice 8.** On considère les applications  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$  et  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, x \mapsto A^T \cdot x$  où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez le noyau de  $f$  en trouvant une base pour celui-ci.
2. Quel est le rang de  $f$  ?
3. Trouver une base pour son image,  $\text{Im } f$ .
4. Trouver une base pour l'image de  $g$  en appliquant des opérations élémentaires de colonnes à la matrice  $A^T$ .
5. Trouver une base de  $\text{Im } g$  de manière plus rapide en utilisant le point 2.
6. Déterminez le noyau de  $g$  en trouvant une base pour celui-ci.
7. Est-ce que l'on a  $\text{Im } f = \ker g$  et  $\ker f = \text{Im } g$  ?

**Exercice 9.** Soit  $n \geq 1$  un entier. Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $f \circ g = 0$ . Montrer que  $\text{Im}(g) \subseteq \ker(f)$ . En déduire que  $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$ .

**Exercice\* 10.** Soit  $f: E \rightarrow E$  une application linéaire telle que  $f^2 = -f$ . Montrer que  $E = \ker f \oplus \text{Im } f$ .

**Exercice\* 11.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps. On note  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  le dual du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

1. Montrer que  $E^*$  est un espace vectoriel.
2. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ . Justifier qu'il existe une unique famille de vecteurs,  $e_i^* \in E^*$  telle que  $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}, \forall (i, j) \in I^2$ . On appellera cette ensemble de formes linéaires famille duale.
3. Montrez que la famille duale d'une base est toujours libre.
4. En déduire qu'en dimension finie, la famille duale est une base et que  $\dim(E) = \dim(E^*)$ .
5. Exemples :
  - (a) Quelle est la base duale de  $\{(1, 1), (1, 0)\}$  dans  $\mathbb{R}^2$  ?
  - (b) Quelle est la famille duale de  $\{X^k\}_{k \in [0, n]}$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  ? (Remarque : le dual de  $\mathbb{R}[X]$  n'est pas du tout isomorphe à  $\mathbb{R}[X]$ .)
6. On note  $E^{**} = (E^*)^*$  le bidual de  $E$ . Soit  $E$  de dimension finie. Montrez que :
 
$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E^{**} \\ x & \mapsto & ev_x \end{array}$$
 est un isomorphisme.
7. Montrer qu'en dimension finie toute base du dual admet une base dont c'est le dual.