Université Claude-Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2026

Fiche TD n°10,

Applications Linéaires

Isomorphismes et changements de bases

Exercice 1. Dans cet exercice, on va déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire (où P' et P'' désignent la dérivée première et seconde du polynôme, respectivement)

$$\Psi \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P + (X + X^2)P' + (-2 + 3X - X^3)P''$$

en utilisant les isomorphismes canoniques entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$. Cela donnera un exemple de leur utilité, puisque la solution d'un problème d'équations différentielles est transposée de cette manière à un problème de matrices.

1. On désigne par $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique dans $\mathbb{R}_n[X]$ et par $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Définir une application linéaire $\varphi_{n+1} \colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ par la formule $\varphi_{n+1}(X^i) := e_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots n\}$. Montrer que c'est bien un isomorphisme pour chaque n. (Autrement dit, montrer que l'application est bien définie comme une application linéaire et que c'est une bijection).
2. Trouver la matrice $M \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ qui correspond à cette application. Se convaincre (par exemple à l'aide d'un ou deux exemples) que si l'on met $\psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto M \cdot x$, alors en effet $\psi = \varphi_4 \circ \Psi \circ (\varphi_3)^{-1}$.
3. Déterminer $\ker M$ et $\mathrm{Im}\ M$ par des méthodes habituelles. En particulier, construire des bases pour ces deux espaces.
4. Utiliser les isomorphismes pour déterminer $\ker \Psi$ et $\mathrm{Im}\ \Psi$ ainsi que leur base. (En particulier, par exemple, $\ker \Psi = (\varphi_3)^{-1} (\ker \psi) \equiv (\varphi_3)^{-1} (\ker M)$.
5. Vérifier explicitement que les vecteurs de base du noyau de Ψ satisfont bien l'équation différentielle
$$P + (X + X^2)P' + (-2 + 3X - X^3)P'' = 0.$$

Exercice 2. Soit

$$\Psi \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_4[X], P \mapsto (1-2X+3X^2)P+(-2+3X-4X^2-2X^3)P'+(1+2X-3X^2+2X^3+3X^4)P''$$

Déterminer $\ker \Psi$ et $\mathrm{Im}\ \Psi$ ainsi que leur bases.
Indication : Utiliser les bases canoniques de $R_n[X]$ pour transformer ce problème en un problème matriciel dans une étape intermédiaire.

Exercice 3. Soit $h \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire définie par $h(P) = 2P' + P$.

1. Trouver la matrice de h dans la base canonique.
2. Quel est le rang de h ?
3. Montrer que $\mathcal{B} = (1, 2 + X, 4X + X^2)$ est une base pour $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice de h dans la base canonique $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$ pour l'espace de départ et la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de d'arrivée.

Exercice 4. Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ la base $((1, 2), (3, -1))$.

Soit $f(x, y) = (-4x + 3y, 2x + y)$, donc $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$. Trouver $M := mat(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, la matrice qui correspond à f dans la base $\mathcal{B}$, une fois par un calcul direct pour la fonction f et une autre fois en utilisant les matrices de passages.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **5.** Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient $u = e_1 - e_2 + e_3$, $v = 2e_1 - e_2 + e_3$, $w = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice $R = mat(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.
3. Calculer R^4 et en déduire les valeurs de A^{4n} pour tous les $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire définie par la matrice A donnée dans la base canonique de E : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices des applications g et h suivantes : $g = f - \mathrm{id}$ et $h = f + 3\,\mathrm{id}$, où id désigne l'application identité dans E.
2. Déterminer $\ker(g)$ et en donner une base $\mathcal{B}_1$.
3. Déterminer $\ker(h)$ et en donner une base $\mathcal{B}_2$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.