

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2026

Fiche TD n°10,

Applications Linéaires

Représentations matricielles des applications linéaires

Exercice 1. Trouver les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels correspondants.

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, -x + y)$.
2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (y, -x + y, 2x - y)$.
3. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + 4y + z, -x + y + z)$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto A \cdot x$.

Donner une expression explicite de $f_A(x, y)$, $f_A(f_A(x, y))$ et $f_{A^2}(x, y)$ où $f_{A^2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto A^2 \cdot x$.
Que remarque-t-on ?

Exercice 3. Trouver les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels correspondants. On note $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. $f_1: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f_1(P) = P'$.
2. $f_2: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f_2(P)(X) = XP'(X)$.
3. $f_3: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f_3(P)(X) = P(X + 1)$.
4. $f_4: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f_4(P) = (P(-1), P(1))$

Exercice 4. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit f l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_3$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$.

1. Écrire la matrice associée à l'application f .
2. Déterminer $\ker(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique (c'est un plan, une droite, ...).
3. Déterminer $\text{Im}(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique.
4. Calculer l'image de $x = (-3, 6, 3)$ par f et commenter.
5. Calculer l'image de $y = (1, 1, 1)$ par f et commenter.

Exercice 5. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit f l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = 3e_1 + e_2 + 2e_3$, $f(e_2) = 6e_1 + 2e_2 + 4e_3$ et $f(e_3) = -9e_1 - 3e_2 - 6e_3$.

1. Écrire la matrice associée à l'application f .
2. Déterminer $\ker(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique.
3. Déterminer $\text{Im}(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique.
4. Calculer l'image de $x = (0, 3, 2)$ par f et commenter.
5. Calculer l'image de $y = (3, 1, 2)$ par f et commenter.

Exercice* 6. Soient E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $u^T \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ tel que $u^T(\lambda)(x) := \lambda(u(x)), \forall (\lambda, x) \in F^* \times E$.

1. Montrez que :
 - (a) $\{\xi \in E^* \mid \xi(x) = 0, \forall x \in \ker(u)\} = \text{Im}(u^T)$,
 - (b) si E est de dimension finie, $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^T)$.
2. En déduire que u est injective si et seulement si u^T est surjective.
3. Quelle est la relation entre la transposée de la matrice de u dans les bases \mathcal{B}, \mathcal{E} et la matrice de u^T dans $\mathcal{E}^*, \mathcal{B}^*$?.