Université Claude Bernard - Lyon 1
L1 UE : Algèbre 2 pour les informaticiens

Durée : 2 heures

Les documents autres que ce sujet sont interdits et tous les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, tablettes, etc) doivent être éteints et hors de portée.
Les cas de triches avérés entraineront une commission disciplinaire.
Toutes les réponses doivent être **justifiées**.

Exercice 1 (5.5 pts)

On considère l'application $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$v(x, y, z) = (2x - y + z,\ -x + 4y - 2z,\ 3x - 3y + z).$$

a. (1.5 pt) Montrer que v est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b. (1 pt) Déterminer la matrice B de v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. (1 pt) Donner une base du noyau de v.

d. (1 pt) Quel est le rang de v ?

e. (1 pt) Donner une base de l'image de v.

Exercice 2 (5.5 pts)

Soient :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. (1 pt) Montrer que Q est inversible et calculer son inverse.

b. (1.5 pt) Calculer $D = Q^{-1}BQ$, puis D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

c. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = -1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 12u_n - 5v_n \end{cases}$$

(1 pt) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2 pt) Exprimer u_n et v_n explicitement en fonction de n.

Exercice 3 (5 pts)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère :

$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } P'(0) = 0\}$, $\quad G = \text{Vect}(X^3 - X^2 + 1,\ X^2 + X)$.

a. (1.5 pt) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. (1.5 pt) Déterminer une base de F.

c. (1 pt) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

d. (1pt) Soit $H = Vect(X^3 + X^2 - 2, X^3 + X + 1)$. Les espaces G et H sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$? La somme $F + H$ est-elle directe ?

Exercice 4 (4 pts)

On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique. On considère l'application linéaire $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de matrice :

$$P = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose également $Q = I - P$, où I est la matrice identité.

1. (2 pt)

   a. Montrer que p est un projecteur.

   c. Déterminer l'image et le noyau de P.

2. (2 pt)

   a. Montrer que Q est aussi la matrice d'un projecteur.

   c. Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire associée.