Intégrale de Riemann

Analyse 2, printemps 2026

Subdivisions d'un segment

Définition
Soient $a < b$ deux réels. Une subdivision de $[a, b]$ est une suite finie $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$ et $a_i < a_{i+1}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Subdivisions d'un segment

Définition
Soient $a < b$ deux réels. Une subdivision de $[a, b]$ est une suite finie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$ et $a_i < a_{i+1}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Le pas d'une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est $\max\{a_{i+1} - a_i \colon i \in [\![0, n-1]\!]\}$.

Subdivisions d'un segment

Définition
Soient $a < b$ deux réels. Une subdivision de $[a, b]$ est une suite finie $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$ et $a_i < a_{i+1}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Le pas d'une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est $\max\{a_{i+1} - a_i \colon i \in [\![0, n-1]\!]\}$.

Autrement dit : on découpe $[a, b]$ en n sous-intervalles ; le pas est la longueur du plus grand de ces sous-intervalles.

Subdivisions d'un segment

Définition
Soient $a < b$ deux réels, et $(a_0, \ldots, a_n)$, $(b_0, \ldots, b_m)$ deux subdivisions de $[a, b]$.

$(b_0, \ldots, b_m)$ raffine $(a_0, \ldots, a_n)$ si chaque $[b_j, b_{j+1}]$ est contenu dans un invervalle de la forme $[a_k, a_{k+1}]$.

Subdivisions d'un segment

Définition
Soient $a < b$ deux réels, et $(a_0, \ldots, a_n)$, $(b_0, \ldots, b_m)$ deux subdivisions de $[a, b]$.

$(b_0, \ldots, b_m)$ raffine $(a_0, \ldots, a_n)$ si chaque $[b_j, b_{j+1}]$ est contenu dans un invervalle de la forme $[a_k, a_{k+1}]$.

Autrement dit : la subdivision $(b_0, \ldots, b_m)$ a été obtenue en découpant les intervalles de la subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$.

Proposition
Soient $a < b$ deux réels, et $(a_0, \ldots, a_n)$ et $(b_0, \ldots, b_m)$ deux subdivisions de $[a, b]$. Alors il existe une subdivision $(c_0, \ldots, c_p)$ qui raffine en même temps $(a_0, \ldots, a_n)$ et $(b_0, \ldots, b_m)$.

Proposition
Soient $a < b$ deux réels, et $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_m)$ deux subdivisions de $[a, b]$. Alors il existe une subdivision $(c_0, \dots, c_p)$ qui raffine en même temps $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_m)$.

Idée : on énumère $\{a_0, \dots, a_n\} \cup \{b_0, \dots, b_m\}$ dans l’ordre croissant.

Preuve de la proposition (non traitée en cours)

Démonstration.
Soit $c_0, \ldots, c_p$ qui énumèrent dans l'ordre croissant l'ensemble $\{a_0, \ldots, a_n; b_0, \ldots, b_m\}$. Comme $a_0 = b_0 = a$ on a $c_0 = a$, de même on a $c_p = b$. Par définition $c_i < c_{i+1}$ pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$ donc $(c_0, \ldots, c_p)$ est une subdivision de $[a, b]$.

Montrons que $(c_0, \ldots, c_p)$ raffine $(a_0, \ldots, a_n)$. Soit $j \in [\![0, p-1]\!]$. Soit i le plus grand entier tel que $a_i \leq c_j$. Notons que $i < n$ puisque $c_j < b = a_n$.

Par définition de i, on a $c_j < a_{i+1}$ donc $c_{j+1} \leq a_{i+1}$ puisque c_{j+1} est par définition le plus petit élément de $\{a_0, \ldots, a_n; b_0, \ldots, b_m\}$ qui est strictement supérieur à c_j.

On montre de la même façon que $(c_0, \ldots, c_p)$ raffine $(b_0, \ldots, b_m)$. $\square$

Fonctions en escalier

Définition
Soient $a < b$ deux réels ; $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. On dit que $(a_0, \ldots, a_n)$ témoigne du fait que f est en escalier, ou encore est une subdivision adaptée à f.

Fonctions en escalier

Définition
Soient $a < b$ deux réels ; $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. On dit que $(a_0, \dots, a_n)$ témoigne du fait que f est en escalier, ou encore est une subdivision adaptée à f.

Une illustration (de T. Blossier).

Fonctions en escalier : premières propriétés

Proposition

1. Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Fonctions en escalier : premières propriétés

Proposition

1. Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
2. Une combinaison linéaire de fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Fonctions en escalier : premières propriétés

Proposition

1. Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
2. Une combinaison linéaire de fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
3. Un produit de fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Fonctions en escalier : premières propriétés

Proposition

1. Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
2. Une combinaison linéaire de fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
3. Un produit de fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Preuve au tableau.

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition

Soient $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. On pose

$$I(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) .$$

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition
Soient $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. On pose

$$I(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) .$$

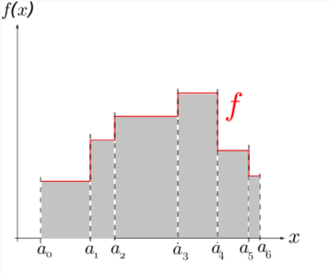
Si $f \geq 0$, $I(f,\sigma)$ est la somme des aires des rectangles entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition
Soient $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à f. On pose

$$I(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) .$$

Si $f \geq 0$, $I(f, \sigma)$ est la somme des aires des rectangles entre le graphe de f et l'axe des abscisses.



Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition
Soient $a < b$ deux réels, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et σ, τ deux subdivisions adaptées à f. Alors $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$.

Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition

Soient $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et σ, τ deux subdivisions adaptées à f. Alors $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$.

Preuve mathématique : Si $\tau = (b_0, \dots, b_m)$ raffine $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$. Il existe $j_0, \dots, j_n$ tels que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on ait $b_{j_k} = a_k$.

$$\begin{aligned}
I(f, \tau) &= \sum_{j=0}^{m-1} (b_{j+1} - b_j) f\left(\frac{b_j + b_{j+1}}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} (b_{j+1} - b_j) f\left(\frac{b_j + b_{j+1}}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} (b_{j+1} - b_j) f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) \left(\sum_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} b_{j+1} - b_j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) (a_{k+1} - a_k) = I(f, \sigma)\ .
\end{aligned}$$

Résultat démontré si τ raffine σ. Dans le cas général on prend γ qui raffine à la fois σ et τ, et on obtient $I(f, \sigma) = I(f, \gamma)$ et $I(f, \tau) = I(f, \gamma)$.

Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition
Soient $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et σ, τ deux subdivisions adaptées à f. Alors $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$.

"Preuve" par <u>des dessins</u>.

Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition
Soient $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et σ, τ deux subdivisions adaptées à f. Alors $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$.

"Preuve" par des dessins.

Définition
Soient $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et σ une subdivision adaptée à f. On pose

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = I(f, \sigma) \ .$$

Propriétés de l’intégrale des fonctions en escalier

Proposition
Soit $a < b \in \mathbb{R}$; f, g en escalier sur $[a, b]$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $\int_a^b 1 \, \mathrm{dx} = b - a$.

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition
Soit $a < b \in \mathbb{R}$; f, g en escalier sur $[a, b]$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $\int_a^b 1 \, \mathrm{dx} = b - a$.
2. Si f est à valeurs positives, $\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \geq 0$.
   (positivité de l'intégrale)

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition
Soit $a < b \in \mathbb{R}$; f, g en escalier sur $[a, b]$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $\int_a^b 1 \, \mathrm{dx} = b - a$.
2. Si f est à valeurs positives, $\int_a^b f(x) \mathrm{dx} \geq 0$.
   (positivité de l'intégrale)
3. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, \mathrm{dx} = \alpha \int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} + \beta \int_a^b g(x) \, \mathrm{dx}$.
   (linéarité de l'intégrale)

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition
Soit $a < b \in \mathbb{R}$; f, g en escalier sur $[a, b]$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $\int_a^b 1 \, \mathrm{dx} = b - a$.
2. Si f est à valeurs positives, $\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \geq 0$.
   (positivité de l'intégrale)
3. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, \mathrm{dx} = \alpha \int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} + \beta \int_a^b g(x) \, \mathrm{dx}$.
   (linéarité de l'intégrale)
4. $\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{dx}$ **(inégalité triangulaire)**.

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition
Soit $a < b \in \mathbb{R}$; f, g en escalier sur $[a, b]$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $\int_a^b 1 \, \mathrm{dx} = b - a$.
2. Si f est à valeurs positives, $\int_a^b f(x) \mathrm{dx} \geq 0$.
   (positivité de l'intégrale)
3. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, \mathrm{dx} = \alpha \int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} + \beta \int_a^b g(x) \, \mathrm{dx}$.
   (linéarité de l'intégrale)
4. $\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{dx}$ **(inégalité triangulaire)**.
5. S'il existe $x_1, \ldots, x_k$ avec $f(x) = g(x)$ pour tout $x \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$ alors $\int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} = \int_a^b g(x) \, \mathrm{dx}$.

Fonctions intégrables (au sens de Riemann)

On voudrait pouvoir intégrer plus de fonctions que les fonctions en escalier, en particulier les fonctions continues !

Fonctions intégrables (au sens de Riemann)

On voudrait pouvoir intégrer plus de fonctions que les fonctions en escalier, en particulier les fonctions continues !

Idée : l'"aire sous la courbe" de f peut être approchée par des aires d'union de rectangles, autrement dit des intégrales de fonctions en escalier.

Fonctions intégrables (au sens de Riemann)

On voudrait pouvoir intégrer plus de fonctions que les fonctions en escalier, en particulier les fonctions continues !

Idée : l'"aire sous la courbe" de f peut être approchée par des aires d'union de rectangles, autrement dit des intégrales de fonctions en escalier.

Illustration.

Subdivisions pointées

Soit $a < b \in \mathbb{R}$.

Définition
Une subdivision pointée $\Sigma =(a_0, \dots, a_n; x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ est la donnée :

- d'une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$;
- de points $x_1, \dots, x_n$ de $[a, b]$ tels que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on ait $x_k \in [a_{k-1}, a_k]$.

Subdivisions pointées

Soit $a < b \in \mathbb{R}$.

Définition

Une subdivision pointée $\Sigma = (a_0, \ldots, a_n; x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ est la donnée :

- d'une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$;
- de points $x_1, \ldots, x_n$ de $[a, b]$ tels que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on ait $x_k \in [a_{k-1}, a_k]$.

Un cas particulier très important : on divise $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$, et où l'on choisit x_k à gauche de l'intervalle $[a_{k-1}, a_k]$ (c'est-à-dire $x_k = a + (k-1)\frac{b-a}{n}$) ou à droite de cet intervalle ($x_k = a + k\frac{b-a}{n}$)

Sommes de Riemann

Définition

Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\Sigma = (a_0, \dots, a_n; x_1, \dots, x_n)$ une subdivision pointée de $[a, b]$. La somme de Riemann associée à f et à Σ est

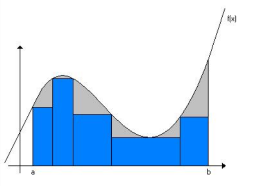
$$S(f, \Sigma) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) f(x_k) \ .$$

Sommes de Riemann

Définition

Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\Sigma = (a_0, \dots, a_n; x_1, \dots, x_n)$ une subdivision pointée de $[a, b]$. La somme de Riemann associée à f et à Σ est

$$S(f, \Sigma) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) f(x_k) \ .$$



Sommes de Riemann

Définition
Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\Sigma = (a_0, \ldots, a_n; x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision pointée de $[a, b]$. La somme de Riemann associée à f et à Σ est

$$S(f, \Sigma) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) f(x_k) \ .$$

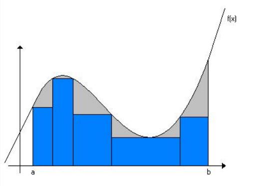


Illustration.

Sommes de Darboux supérieures et inférieures

Définition

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Étant donnée une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ on définit pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$S_-(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \inf_{[a_k, a_{k+1}]} f \quad \text{et} \quad S_+(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \sup_{[a_k, a_{k+1}]} f$$

Sommes de Darboux supérieures et inférieures

Définition

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Étant donnée une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ on définit pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$S_-(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \inf_{[a_k, a_{k+1}]} f \quad \text{et} \quad S_+(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \sup_{[a_k, a_{k+1}]} f$$

si Σ est une subdivision pointée dont la subdivision associée est σ, alors on a par définition $S_-(f, \sigma) \leq S(f, \Sigma) \leq S_+(f, \sigma)$.

Sommes de Darboux supérieures et inférieures

Définition

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Étant donnée une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ on définit pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$S_-(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \inf_{[a_k, a_{k+1}]} f \quad \text{et} \quad S_+(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \sup_{[a_k, a_{k+1}]} f$$

si Σ est une subdivision pointée dont la subdivision associée est σ, alors on a par définition $S_-(f, \sigma) \leq S(f, \Sigma) \leq S_+(f, \sigma)$.

<u>Illustration</u>.

Sommes de Darboux supérieures et inférieures

Définition

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Étant donnée une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ on définit pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$S_-(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \inf_{[a_k, a_{k+1}]} f \quad \text{et} \quad S_+(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \sup_{[a_k, a_{k+1}]} f$$

si Σ est une subdivision pointée dont la subdivision associée est σ, alors on a par définition $S_-(f, \sigma) \leq S(f, \Sigma) \leq S_+(f, \sigma)$.

Illustration.

Proposition

Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et σ, τ deux subdivisions de $[a, b]$.

Si τ raffine σ,alors $S_-(f, \sigma) \leq S_-(f, \tau)$ et $S_+(f, \tau) \leq S_+(f, \sigma)$

Preuve de la propriété précédente (non traitée en cours)

Démonstration.
Notons $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ et $\tau = (b_0, \dots, b_p)$. Comme τ raffine σ, il existe $j_0 = 0 < \dots < j_n = b$ tels que $b_{j_k} = a_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $j \in [\![j_k, j_{k+1} - 1]\!]$ on a $\inf_{[b_j, b_{j+1}]} f \geq \inf_{[a_k, a_{k+1}]} f$, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
S_-(f, \tau) &= \sum_{j=0}^{p-1} (b_{j+1} - b_j) \inf_{[b_j, b_{j+1}]} f = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} (b_{j+1} - b_j) \inf_{[b_j, b_{j+1}]} f \\
&\geq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} (b_{j+1} - b_j) \inf_{[a_k, a_{k+1}]} f \geq \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \inf_{[a_k, a_{k+1}]} f \\
&\geq S_-(f, \sigma)
\end{aligned}
$$

On démontre l'autre inégalité de manière analogue. $\square$

Un dernier lemme technique...

Proposition
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$ et σ, τ deux subdivisions de $[a, b]$. Alors on a

$$-M|b-a| \leq S_-(f, \sigma) \leq S_+(f, \tau) \leq M|b-a|$$

Un dernier lemme technique...

Proposition
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$ et σ, τ deux subdivisions de $[a, b]$. Alors on a

$$-M|b-a| \leq S_-(f,\sigma) \leq S_+(f,\tau) \leq M|b-a|$$

Démonstration.
En notant $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ on a

$$S_-(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) \inf_{[a_{k-1},a_k]} f \geq \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})(-M) = -M(b-a)$$

La preuve pour la majoration de $S_+(f,\tau)$ est similaire.

Pour montrer que $S_-(f,\sigma) \leq S_+(\sigma,\tau)$, considérons une subdivision ρ qui raffine à la fois σ et τ. On a alors $S_-(f,\sigma) \leq S_-(f,\rho)$ et $S_+(f,\rho) \leq S_+(f,\tau)$.

Par définition, on a $S_-(f,\rho) \leq S_+(f,\rho)$, par conséquent $S_-(f,\sigma) \leq S_+(f,\tau)$. $\square$

La définition (enfin !)

Définition
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. On définit

$$I_-(f) = \sup_{\sigma\in\mathcal{S}} S_-(f, \sigma) \quad \text{et} \quad I_+(f) = \inf_{\sigma\in\mathcal{S}} S_+(f, \sigma)$$

Quand ces deux valeurs sont égales, on dit que f est intégrable sur $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cette valeur commune.

Comme $S_-(f, \sigma) \leq S_+(f, \tau)$ pour toutes les subdivisions σ, τ, on a $I_-(f) \leq S_+(f, \tau)$ pour toute subdivision τ donc $I_-(f) \leq I_+(f)$.

Proposition
f est intégrable ssi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe σ telle que $S_+(f, \sigma) \leq S_-(f, \sigma) + \varepsilon$.

Une conséquence de la caractérisation

Proposition

Soit $[a, b]$ un segment, et $(a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que la restriction de f à $[a_i, a_{i+1}]$ soit intégrable pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx$$

Une conséquence de la caractérisation

Proposition

Soit $[a, b]$ un segment, et $(a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que la restriction de f à $[a_i, a_{i+1}]$ soit intégrable pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx$$

Idée de preuve (détails au tableau) : recoller des subdivisions bien choisies des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$.

Convergence des sommes de Riemann

Proposition
Soit $[a, b]$ un segment, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée Σ de $[a, b]$ dont le pas est inférieur à δ on ait $\left| S(f, \Sigma) - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \varepsilon$.

En particulier, si f est intégrable sur $[a, b]$ alors les sommes

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

convergent toutes deux vers $\int_a^b f(x)\, dx$ quand n tend vers $+\infty$.

Preuve de la convergence (non traité en cours !)

Soit $\varepsilon > 0$.

Fixons une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ telle que $S_-(f, \sigma) \geq I_-(f) - \varepsilon$, ce qui est possible par définition d'une borne supérieure. Fixons également M tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, et notons $\delta = \frac{\varepsilon}{4nM}$.

Ensuite, considérons $\tau = (b_0, \ldots, b_m)$ une subdivision pointée de $[a, b]$ dont le pas est plus petit que δ.

Notons $A = \{k \in [\![1, m]\!] \colon \exists j \in [\![1, n]\!]\ [b_{k-1}, b_k] \subseteq [a_{j-1}, a_j]\}$.

Pour tout $k \in A$ il existe un unique j_k tel que $[b_{k-1}, b_k] \subseteq [a_{j_k-1}, a_{j_j k}]$; et on a alors $\inf_{[a_{j_k-1}, a_{j_k}]} f \leq \inf_{[b_{k-1}, b_k]} f$.

Preuve de la convergence des sommes de Riemann, suite

Si $k \notin A$ alors il existe un unique j_k tel que $a_{j_k-1} \le b_{k-1} \le a_{j_k} \le b_k$. Si $j_k = j_{k'}$ pour $k, k' \notin A$ alors $k = k'$. Donc A^c a moins de n éléments.

Si $k \notin A$ on a

$$\inf_{[b_{k-1},b_k]} f \ge \inf_{[a_{j_k-1},a_{j_k}]} f - 2M \quad \text{et} \quad \inf_{[b_{k-1},b_k]} f \ge \inf_{[a_{j_k},a_{j_k+1}]} f - 2M$$

On obtient :

$$\begin{aligned} S_-(f,\tau) &= \sum_{k\in A}(b_k - b_{k-1}) \inf_{[b_{k-1},b_k]} f + \sum_{k\notin A}(b_k - b_{k-1}) \inf_{[b_{k-1},b_k]} f \\ &\ge \left(\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) \inf_{[a_{j-1},a_j]} f \right) - 2M|A| \sum_{k\notin A}(b_k - b_{k-1}) \\ &\ge S_-(f,\sigma) - 4nM\delta \ge S_-(f,\sigma) - \varepsilon \ge I_-(f) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Fin de la preuve de la convergence des sommes de Riemann

Nous avons montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ dont le pas est inférieur à δ on a $S_-(f,\sigma) \geq I_-(f,\sigma) - \varepsilon$. On montre de même que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta' > 0$ tel que pour toute subdivision σ dont le pas est inférieur à δ' on a $S_+(f,\sigma) \leq I_+(f,\sigma) + \varepsilon$.

Soit maintenant Σ une subdivision pointée dont le pas est plus petit que $\min(\delta, \delta')$. On a alors, en notant σ la subdivision associée à σ :

$$I_-(f) - \varepsilon \leq S_-(f,\sigma) \leq S(f,\Sigma) \leq S_+(f,\sigma) \leq I_+(f,\sigma) + \varepsilon\,.$$

Puisque f est intégrable, on a $I_-(f) = I_+(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, et finalement

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S(f,\Sigma)\right| \leq \varepsilon.$$