Analyse 2, session 2 : éléments de correction.

Exercice 1. *Question de cours.*
Soit a, b deux réels tels que $a < b$ et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
Comme f est continue et $[a,b]$ est un segment, il existe $m \leq M \in \mathbb{R}$ tels que $f([a,b]) = [m,M]$. Par positivité et linéarité de l'intégrale, on a, puisque $m \leq f(t) \leq M$ pour tout $t \in [a,b]$, que

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dt \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dt = M$$

Donc $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ appartient à $[m,M] = f([a,b])$, autrement dit il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Exercice 2. *Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$y''(t) - 6y'(t) + 10y(t) = e^{3t} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{E}$$

On considère tout d'abord l'équation caractéristique $r^2 - 6r + 10 = 0$. Puisque $r^2 - 6r + 10 = (r-3)^2 + 1$, les racines de cette équation sont $3 \pm \imath$. On en conclut que les solutions homogène associée à (E) sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto e^{3t}(A\cos(t) + B\sin(t))$, où $A, B \in \mathbb{R}$.
Il nous reste à trouver une solution particulière, qu'on cherche sous la forme $t \mapsto \lambda e^{3t}$; cette fonction est solution si, et seulement si, $9\lambda - 18\lambda + 10\lambda = 1$, autrement dit si, et seulement si, $\lambda = 1$. Finalement, les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto e^{3t}(1 + A\cos(t) + B\sin(t))$, où $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. *À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\,dx$.*

   Notons que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \arctan(x)$ sont de classe C^1 ; on peut donc utiliser la formule d'intégration par parties et obtenir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\arctan(x)\,dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\Big[x - \arctan(x)\Big]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

2. *À l'aide du changement de variable $u = \cos(t)$, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)(1+\cos^2(t))}\,dt$.*

   La fonction intégrée est continue puisque le dénominateur ne s'annule pas sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Le changement de variable $t \mapsto \cos(t)$ est de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, et on a $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En utilisant que la dérivée de $t \mapsto \cos(t)$ est égale à $t \mapsto -\sin(t)$, on obtient donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)(1+\cos^2(t))}\,dt = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-du}{u(1+u^2)} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{du}{u(1+u^2)}$$

On doit maintenant décomposer $\frac{u}{1+u^2}$ en éléments simples ; on sait qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{u}{1+u^2} = \frac{a}{u} + \frac{bu+c}{1+u^2}$. En multipliant par u et en évaluant en $u = 0$, on obtient $a = 1$; en multipliant par $1 + u^2$ et en évaluant en $\imath$, on obtient $b\imath + c = \frac{1}{\imath} = -\imath$. Donc $b = -1$ et $c = 0$. On arrive finalement à

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)(1+\cos^2(t))}\, dt &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{u}\, du - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{u}{1+u^2}\, du \\
&= \Big[\ln(u)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\
&= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2) \\
&= \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2)\ .
\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. *Donner le développement limité à l'ordre* 3 *au voisinage de* 1 *de* $f\colon x \mapsto x^2$ *et* $g\colon x \mapsto e^x$.
   Pour f, on écrit :

   $$x^2 = ((x-1)+1)^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^3$$

   Pour g, on pose $x = 1 + u$, et on doit développer à l'ordre 3 en 0

   $$e^{1+u} = e \times e^u = e\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)\right)$$

   On obtient donc que en 1 on a

   $$e^x = e\left(1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3\right)$$

2. Dans cette question on pose $h(x) = \arctan(x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (a) *Déterminer le développement limité à l'ordre* 3 *de* h' *au voisinage de* 0.
   La fonction h est de classe C^∞, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'égalité

   $$h'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} = \frac{1}{2+2x+x^2}$$

   Pour calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de h', on peut par exemple raisonner par composition à partir du développement limité de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ et obtenir :

   $$\begin{aligned}
   h'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+x+\frac{1}{2}x^2} \\
   &= \frac{1}{2}\left(1 - \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) + \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)^3\right) + o(x^3) \\
   &= \frac{1}{2}\left(1 - x + x^2\left(-\frac{1}{2} + 1\right) + x^3(1-1)\right) + o(x^3) \\
   &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)\ .
   \end{aligned}$$

(b) *Donner le développement limité à l'ordre* 4 *de* h *au voisinage de* 0.

Comme h est de classe C^4, le développement limité de h à l'ordre 4 en 0 s'obtient en intégrant le développement limité de h' à l'ordre 3 en 0 ; puisque $h(0) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, on obtient ainsi, au voisinage de 0, l'égalité

$$h(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^4) \ .$$

(c) *Donner l'équation de la tangente en* 0 *à la courbe représentative de* h*, et déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de* 0.

Comme h est de classe C^1, l'équation de la tangente se lit en considérant le développement limité de h à l'ordre 1 en 0 ; la tangente recherchée est donc d'équation $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}x$.

Enfin, puisque $h(x) - \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}x\right) = -\dfrac{1}{4}x^2 + o(x^2) \sim_0 -\dfrac{1}{4}x^2$, qui est négatif au voisinage de 0, on conclut que la courbe représentative de h est sous sa tangente au voisinage de 0.