
Analyse 2 : session 2 (durée 1h)

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction, le détail des calculs doit apparaître sur la copie et la présentation doit être la plus soignée possible.

Exercice 1. Question de cours.

Soit a, b deux réels tels que $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - 6y'(t) + 10y(t) = e^{3t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{E})$$

Exercice 3.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 x \arctan(x) dx$.
2. À l'aide du changement de variable $u = \cos(t)$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)(1 + \cos^2(t))} dt$.

Exercice 4.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto e^x$.
2. Dans cette question on pose $h(x) = \arctan(x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de h' au voisinage de 0.
 - (b) Donner le développement limité à l'ordre 4 de h au voisinage de 0.
 - (c) Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de h , et déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0.