Algèbre 2 , session 2 : éléments de correction.

Exercice 1. *Question de cours.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

1. *Démontrer que* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   Par définition de la trace, on a (en utilisant les notations habituelles pour les coefficients d'une matrice) :
$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k} \\ &= \operatorname{tr}(BA)\end{aligned}$$

2. *Démontrer que si A et B sont semblables alors* $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
   Si A et B sont semblables, il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et telle que $A = PBP^{-1}$. On a alors (en utilisant le résultat de la question précédente et l'associativité du produit matriciel) :
$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P(BP^{-1})) = \operatorname{tr}((BP^{-1})P) = \operatorname{tr}(B(P^{-1}P)) = \operatorname{tr}(B)$$

Exercice 2. *Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -x + 2y + 3z - t = 0\}$.*

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*
   Tout d'abord, E contient $(0, 0, 0, 0)$ et est donc non vide. Soit $u = (x, y, z, t)$ et $u' = (x', y', z', t')$ dans E, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour vérifier si $\lambda u + v$, qui est de coordonnées $(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$, appartient à E, on écrit
$$\begin{aligned}-(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') + 3(\lambda z + z') - (\lambda t + t') &= \lambda(-x + 2y + 3z - t) + (-x' + 2y' + 3z' - t') \\ &= 0\end{aligned}$$

2. *Donner une base de E.*
   Les vecteurs $u_1 = (1, 0, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, 0, 2)$ et $u_3 = (0, 0, 1, 3)$ appartiennent tous trois à E et forment une famille libre. En effet, si λ_1, λ_2, λ_3 sont trois réels tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ on obtient en regardant la première coordonnée que $\lambda_1 = 0$, puis $\lambda_2 = 0$ grâce à la deuxième coordonnée, et enfin $\lambda_3 = 0$.
   Comme E n'est pas égal à $\mathbb{R}^4$ (par exemple $(1, 0, 0, 0)$ n'appartient pas à E), il est de dimension au plus 3 ; la famille (u_1, u_2, u_3) en est donc une base.

Exercice 3. *On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi(P) = XP'' + (X - 4)P' - 3P$.*

1. *Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.*
   La linéarité de φ suit de la linéarité des applications $P \mapsto XP$, $P \mapsto (X - 4)P$, $P \mapsto 3P$ et $P \mapsto P'$, ainsi que du fait qu'une composée d'applications linéaires est linéaire.
   Pour vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, il nous reste à noter que si P est de degré inférieur ou égal à 3 alors $\deg(XP'') \leq 2$, $\deg((X-4)P') \leq 3$ et $\deg(3P) \leq 3$, donc $\deg(\varphi(P)) \leq 3$ puisque $\varphi(P)$ est une combinaison linéaire de trois polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

2. *Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.*
   On a :
   - $\varphi(1) = -3$.
   - $\varphi(X) = (X-4) - 3X = -2X - 4$.
   - $\varphi(X^2) = 2X + (X-4)(2X) - 3X^2 = -X^2 - 6X$.
   - $\varphi(X^3) = X(6X) + (X-4)(3X^2) - 3X^3 = -6X^2$.

   La matrice de φ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ est donc égale à $M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. *Déterminer une base du noyau de φ et le rang de φ.*
   En utilisant la matrice M qu'on a obtenue ci-dessus, on voit qu'un polynôme de la forme $a + bX + cX^2 + dX^3$ est dans $\ker(\varphi)$ si, et seulement si, on a $-3a - 4b = 0$; $-2b - 6c = 0$; et $-c - 6d = 0$. Ces conditions sont équivalentes à $c = -6d$, $b = 18d$ et $a = -24d$. Les éléments de $\ker(\varphi)$ sont donc tous les polynômes de la forme $-24d + 18dX - 6dX^2 + dX^3$, où $d \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\ker(\varphi)$ est de dimension 1 et le polynôme $-24 + 18X - 6X^2 + X^3$ en est une base.
   Le théorème du rang nous permet de conclure que $\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\ker(\varphi)) = 3$.

4. *Déterminer l'image de φ (indication : on peut le faire avec très peu de calculs).*
   On sait que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 3 ; par ailleurs c'est un sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$ puisque tous les coefficients sur la dernière ligne de M sont nuls. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, on conclut que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4. *Dans $M_2(\mathbb{R})$ on considère les 4 matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que (A, B, C, D) est une base de $M_2(\mathbb{R})$.*
   Soit a, b, c, d des réels tels que $aA + bB + cC + dD = 0$, autrement dit tels que

$$\begin{pmatrix} a+b+c+d & c+d \\ b+c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On en déduit successivement que $d = 0$, $c = 0$, $b = 0$ et enfin $a = 0$. On vient de prouver que (A, B, C, D) est une famille libre de $M_2(\mathbb{R})$, qui est de dimension 4 : c'est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

On note $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

2. *Donner la matrice de passage de (E_1, E_2, E_3, E_4) à (A, B, C, D), puis la matrice de passage de (A, B, C, D) à (E_1, E_2, E_3, E_4).*
   La première matrice recherchée s'obtient en écrivant A, B, C, D comme combinaisons linéaires de (E_1, E_2, E_3, E_4) et est donc égale à $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Comme P est une matrice de changement de base, elle est inversible ; la deuxième matrice recherchée est l'inverse de P, qu'on peut obtenir par exemple en appliquant la méthode du pivot de Gauss à P. On obtient après calculs l'égalité $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.