Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre de printemps 2024-2025
Cursus préparatoire/CCP, 1ère année | 25 juin 2025

Algèbre 2 : session 2 (durée 1h)

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction, le détail des calculs doit apparaître sur la copie et la présentation doit être la plus soignée possible.

Exercice 1. *Question de cours.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Démontrer que si A et B sont semblables alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Exercice 2. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -x + 2y + 3z - t = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de E.

Exercice 3. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi(P) = XP'' + (X-4)P' - 3P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer une base du noyau de φ et le rang de φ.
4. Déterminer l'image de φ (indication : on peut le faire avec très peu de calculs).

Exercice 4. Dans $M_2(\mathbb{R})$ on considère les 4 matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que (A, B, C, D) est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

On note $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

2. Donner la matrice de passage de (E_1, E_2, E_3, E_4) à (A, B, C, D), puis la matrice de passage de (A, B, C, D) à (E_1, E_2, E_3, E_4).