Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2025-2026
Cursus préparatoire/CCP, $1^{\text{ère}}$ année 11 mai 2026

Algèbre 2, cursus préparatoire, épreuve de “seconde chance”
Durée : 1h30

Exercice 1. *Question de cours. Soit E, F deux espaces vectoriels, $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f_1, \dots, f_n$ des éléments de F. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi\colon E \to F$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on ait $\varphi(e_i) = f_i$.*
Commençons par établir l'unicité. Si φ, ψ sont deux applications linéaires telles que $\varphi(e_i) = f_i = \psi(e_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ alors $e_i \in \ker(\varphi - \psi)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Comme $\ker(\varphi - \psi)$ est un sous-espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice, il s'ensuit que $\ker(\varphi - \psi) = E$, autrement dit $\varphi - \psi$ est l'application nulle, c'est-à-dire $\varphi = \psi$.
Montrons maintenant l'existence d'une telle application linéaire. Étant donné $x \in E$, on note $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, autrement dit $x_1, \dots, x_n$ sont les réels tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
On pose $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$. Par définition, on a bien $\varphi(e_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et il nous reste à montrer que φ est linéaire : soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda x + y) &= \varphi\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) \\
&= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i) e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i) f_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i f_i + \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \\
&= \lambda \varphi(x) + \varphi(y).
\end{aligned}$$

Ceci prouve que φ est linéaire.

Exercice 2. *Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel*

$$F = \{(x, y, z, t) : x + y + z - t = 0 \text{ et } 2y + z + t = 0\}.$$

1. *Déterminer une base de F et donner sa dimension.*
   La matrice du système est déjà échelonnée, on peut par exemple prendre comme paramètres libres z et t et obtenir que $(x, y, z, t) \in F$ si, et seulement si, $y = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t$ et $x = t - z - y = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}z$.
   On vient de démontrer que

   $$F = \operatorname{Vect}\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)\right) = \operatorname{Vect}((-1, -1, 2, 0), (3, -1, 0, 2)).$$

   Les vecteurs $u = (-1, -1, 2, 0)$ et $v = (3, -1, 0, 2)$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base de F, qui est par conséquent de dimension 2.
2. *Déterminer un supplémentaire de F dans E.*
   On voit (par exemple, directement en regardant l'équation cartésienne de F) que $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ n'appartient pas à $F = \operatorname{Vect}(u, v)$, donc (e_1, u, v) est libre.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathrm{Vect}(e_1, u, v)$. Il existe des réels α, β, γ tels que

$$(a, b, c, d) = \alpha e_1 + \beta u + \gamma v = (\alpha - \beta + 3\gamma, -\beta - \gamma, 2\beta, 2\gamma).$$

En particulier, on a $2b + c + d = 0$. Donc $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(e_1, u, v)$, et puisque (e_1, u, v) est libre on en déduit que (e_1, e_2, u, v) est libre, et est donc une base de $\mathbb{R}^4$ puisque $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$.
Il s'ensuit que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \{(x, y, 0, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ est un supplémentaire de F.

Exercice 3. *Dans cet exercice on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\varphi(x, y, z) = (4x + y + z, x + 4y + z, x + y + 4z).$$

1. *Donner la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.*
On écrit en colonne les coordonnées de $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ et on obtient
$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. *Montrer que φ est bijective.*
On échelonne M ; en remplaçant L_2 par $4L_2 - L_1$ et L_3 par $4L_3 - L_1$ on arrive à la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 3 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix}$. Ensuite on remplace L_3 par $5L_3 - L_2$ et on conclut que M est équivalente en lignes à $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 72 \end{pmatrix}$. C'est une matrice carrée, échelonnée, dont toutes les lignes sont non nulles : M est inversible, par conséquent φ est bijective.

3. *On considère les vecteurs $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$, $f_3 = e_1 - e_3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
Pour gagner un peu de temps pour la prochaine question, on exprime e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Déjà, on a $f_1 - f_2 - f_3 = 3e_3$; il suit que
$$e_2 = f_2 + e_3 = \frac{1}{3} f_1 + \frac{2}{3} f_2 - \frac{1}{3} f_3$$
et que
$$e_1 = f_1 - e_2 - e_3 = \frac{1}{3} f_1 - \frac{1}{3} f_2 + \frac{2}{3} f_3.$$
Donc (f_1, f_2, f_3) est une famille de 3 vecteurs qui engendre $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3 : c'est une base.

4. *Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.*
Par définition, les colonnes de P donnent les coordonnées de f_1, f_2, f_3 dans la base (e_1, e_2, e_3) et on a donc
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Puisque P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, les formules obtenues à la question précédente nous donnent directement
$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. *Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$.*

On peut soit appliquer la formule de changement de base et calculer $M' = P^{-1}MP$ ou directement appliquer φ :

$$\varphi(f_1) = (6,6,6) = 6f_1 \ ; \ \varphi(f_2) = (0,3,-3) = 3f_2 \ ; \ \varphi(f_3) = (3,0,-3) = 3f_3.$$

On en déduit que $M' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. *Calculer $(M')^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire l'expression de M^n en fonction de n.*

Puisque M' est diagonale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité $(M')^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Comme $M = PM'P^{-1}$, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} M^n &= P(M')^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6^n & 0 & 3^n \\ 6^n & 3^n & 0 \\ 6^n & -3^n & -3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ 2^n & 1 & 0 \\ 2^n & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 2^n+2 & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n+2 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 2^n+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour se convaincre qu'on n'a pas fait d'erreur de calcul, on peut par exemple vérifier que pour $n = 1$ on obtient bien la bonne valeur pour M.

7. *On considère les suites récurrentes de nombres réels (a_n), (b_n), (c_n) définies par les égalités suivantes :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 4a_n + b_n + c_n, \\ b_{n+1} &= a_n + 4b_n + c_n, \\ c_{n+1} &= a_n + b_n + 4c_n, \end{cases}$$

avec $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 1$. Donner une expression de a_n, b_n, c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Notons $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On a pour tout n l'égalité $X_{n+1} = MX_n$, ce dont on déduit par récurrence que $X_n = M^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient à l'aide du résultat de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 2^{n+1}-2 \\ 2^{n+1}+1 \\ 2^{n+1}+1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \colon E \to E$ une application linéaire.*

1. *Montrer que :*
$$\ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E.$$

Soit $x \in \ker(f)$; alors $f((f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \ker(f^2)$. Donc $\ker(f) \subseteq \ker(f^2)$.

Supposons que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$; soit $x \in \ker(f^2)$. Alors $f(x) \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, donc $f(x) = 0$ d'où $x \in \ker(f)$. On conclut que dans ce cas $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Réciproquement, supposons que $\ker(f) = \ker(f^2)$. Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$; alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, et $f(x) = 0 = f^2(y)$. Donc $y \in \ker(f^2) = \ker(f)$, d'où $x = f(y) = 0$.

On en conclut que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$; par le théorème du rang, on sait que $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$, et on en déduit que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.

2. *On suppose dans cette question que* $\dim(E) = 3$*,* $f \neq 0$ *et* $f^2 = 0$*. Déterminer le rang de* f*.*

Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, son rang vaut 0, 1, 2, ou 3.

Si $\mathrm{rang}(f) = 0$ alors f est l'application nulle, ce qui n'est pas le cas par hypothèse ; et si $\mathrm{rang}(f) = 3$ alors f est bijective, donc f^2 aussi, ce qui contredirait également l'hypothèse de l'énoncé.

Il nous reste deux possibilités : $\mathrm{rang}(f) = 1$ ou $\mathrm{rang}(f) = 2$.

Notons que $f^2 = 0$ signifie que, pour tout $x \in E$, on a $f(f(x)) = 0$, autrement dit $f(x) \in \ker(f)$ pour tout $x \in E$, ou encore $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f)$. Ceci a pour conséquence que $\mathrm{rang}(f) \leq \dim(\ker(f))$.

On a déjà vu que $1 \leq \mathrm{rang}(f) \leq 2$; on sait également que $\dim(\ker(f))$ est un entier plus grand que $\mathrm{rang}(f)$ et que $\mathrm{rang}(f) + \dim(\ker(f)) = 3$ d'après le théorème du rang. On conclut que $\mathrm{rang}(f) = 1$.