
Algèbre 2, cursus préparatoire, épreuve de "seconde chance"
Durée : 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction, le détail des calculs doit apparaître sur la copie et la présentation doit être la plus soignée possible.

Exercice 1. *Question de cours.* Soit E, F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels, $n \in \mathbb{N}^*$, (e_1, \dots, e_n) une base de E et f_1, \dots, f_n des éléments de F . Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi: E \rightarrow F$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on ait $\varphi(e_i) = f_i$.

Exercice 2. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z, t) : x + y + z - t = 0 \text{ et } 2y + z + t = 0\}.$$

1. Déterminer une base de F et donner sa dimension.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E .

Exercice 3. Dans cet exercice on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère l'application linéaire $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(x, y, z) = (4x + y + z, x + 4y + z, x + y + 4z).$$

1. Donner la matrice M de φ dans la base \mathcal{B} .
2. Montrer que φ est bijective.
3. On considère les vecteurs $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$, $f_3 = e_1 - e_3$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' et calculer P^{-1} .
5. Déterminer la matrice M' de φ dans la base \mathcal{B}' .
6. Calculer $(M')^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire l'expression de M^n en fonction de n .
7. On considère les suites récurrentes de nombres réels (a_n) , (b_n) , (c_n) définies par les égalités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} &= 4a_n + b_n + c_n, \\ b_{n+1} &= a_n + 4b_n + c_n, \\ c_{n+1} &= a_n + b_n + 4c_n, \end{cases}$$

avec $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 1$. Donner une expression de a_n , b_n , c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $f: E \rightarrow E$ une application linéaire.

1. Montrer que :

$$\ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow \ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E.$$

2. On suppose dans cette question que $\dim(E) = 3$, $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Déterminer le rang de f .