Lyon 1 Université — Semestre de printemps 2025-2026

Cursus prépa 1A : Analyse 2 - Algèbre 2 — 04 Février 2026

Devoir CUPGE n° 1 - 1h30

L'usage ou la possession de calculatrices, de téléphones ou d'autres appareils électroniques sont interdits.

La rédaction mathématique et la présentation de votre copie seront prises en compte dans la notation. (Le barème est indicatif et non définitif)

Exercice 1. Questions et applications du cours (/4)

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}(x)^2 + \mathrm{sh}(x)^2$.
2. Soit $f :]0; 2\pi[\to \mathbb{R}$, donner la définition *(avec quantificateurs)* de "f est continue en π".
3. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} + \ln(x)}{e^{x^2}}$.

Exercice 2. (/6) Soit $M \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer M^2, puis déterminer $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $M^2 - 3M = \delta I_3$.
   (b) En déduire que M est inversible et donner la matrice M^{-1}.
2. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$.
   (b) Montrer l'unicité d'un tel couple.
3. Soit $n \geq 2$. En réalisant la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$, on obtient qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + (\alpha_n X + \beta_n)$.
   (a) En utilisant les racines du polynômes $X^2 - 3X + 2$, déterminer une expression de α_n et β_n.
   (b) En déduire une expression de M^n.

Exercice 3. (/7) On définit deux suites réelles u et S par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}.$$

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^3$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3u_n + \frac{n(3n+5)}{2}.$$

   (b) En déduire *(sans raisonnement par récurrence)* que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. On note h la suite de terme générale $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, :

   $$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k+1} = h_{2n+1} - \frac{1}{2}h_n - 1$.

   (c) En déduire une expression de S_n en fonction des termes de la suite h.

   (d) Nous admettons qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ tels que $\forall n \geq 2$:

   $$h_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n.$$

   En déduire la limite de la suite S en $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4. (/3) Soit $n \geq 2$, notons $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer J^2.
2. En déduire que M est inversibble, et calculer son inverse.