Lyon 1 Université Semestre de printemps 2025-2026
Cursus prépa 1A : Analyse 2 - Algèbre 2 22 Avril 2026

Devoir CUPGE n° 4 - Correction

Exercice 1. Changement de base d'une application linéaire (/7)
Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $B_c = (e_1, e_2, e_3)$. On considère f un endomorphisme de E défini par sa matrice :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On note $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2$.

1. Déterminer des relations entre les vecteurs $f(e'_i)$ et les vecteurs e'_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. Montrer que $B = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
3. Déterminer M, la matrice de f dans la base B.
4. En déduire une expression de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant M, déterminer une expression de $f^n(e'_1 - e'_2 + e'_3)$.

Correction :

1. On a $e'_1 = (1, 1, -1)$, $e'_2 = (1, 0, -1)$ et $e'_3 = (1, -1, 0)$. L'image de ces vecteurs par f est déterminée par les produits matricielles suivants :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{mat}_{B_c}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{mat}_{B_c}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = 2e'_2$ et $f(e'_3) = 3e'_3$.

2. La famille B contient trois vecteurs, il suffit donc de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$ (qui est de dimension 3).
Soient λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1(e_1 + e_2 - e_3) + \lambda_2(e_1 - e_3) + \lambda_3(e_1 - e_2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_1 + (\lambda_1 - \lambda_3)e_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)e_3 \end{aligned}$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base, la famille est libre, donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = & 0 \\ \lambda_3 = & 0 \\ \lambda_2 = & 0 \end{cases} \quad \left(\frac{L1+L2+L3}{3}\right)$$

Ainsi, B est une famille libre, donc c'est une base.

3. D'après la question 1, $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = 2e'_2$ et $f(e'_3) = 3e'_3$, ainsi :

$$\text{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Soit $v \in \mathbb{R}^3$, alors il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $v = xe'_1 + ye'_2 + ze'_3$. On a :

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = & 0 \\ y = & 0 \\ z = & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = 3 - 0 = 3$, et $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$, donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice de f^n dans la base B est $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Ainsi, $f^n(e'_1 - e'_2 + e'_3)$ est déterminé par le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -(2^n) \\ 3^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $f^n(e'_1 - e'_2 + e'_3) = e'_1 - 2^n e'_2 + 3^n e'_3$, d'où :

$$\begin{aligned} f^n(1,0,0) = f^n(e_1) &= (1,-1,1) - 2^n(1,0,-1) + 3^n(1,-1,0) \\ &= (1 - 2^n + 3^n, -1 - 3^n, 1 + 2^n) \\ &= (1 - 2^n + 3^n)e_1 + (-1 - 3^n)e_2 + (1 + 2^n)e_3 \end{aligned}$$

Exercice 2. L'application "reste" (/7)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $A, P \in \mathbb{K}_n[X]$. Notons R_P le reste de la division euclidienne de P par A. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{K}_n[X] &\to \mathbb{K}_n[X] \\ P &\mapsto R_P \end{aligned}$$

1. (a) Montrer que Φ_A est une application linéaire.
   (b) Déterminer $\text{Ker}(\Phi_A)$ et $\text{Im}(\Phi_A)$ si $\deg(A) = 1$.
2. On suppose ici que $A = X - 1$.
   (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X - 1$.
   (b) Exprimer la matrice de Φ_A dans la base canonique $B_c = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. On considère A quelconque.
   (a) Déterminer une base B de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que $\text{mat}_B(\Phi_A)$ est diagonale.
   (b) Est-ce que $\text{Ker}(\Phi_A)$ et $\text{Im}(\Phi_A)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}_n[X]$?

Correction :

1. (a) Notons P_0 le polynôme nul, il vérifie $P_0 = 0 \cdot A + 0$. Son reste dans la division euclidienne par A est donc 0, on a bien $\Phi_A(P_0) = 0$.
   Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}_n[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que $P_i = Q_i \cdot A + R_{P_i}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Donc :
   $$\begin{aligned} P_1 + \lambda P_2 &= Q_1 \cdot A + R_{P_1} + \lambda(Q_2 \cdot A + R_{P_2}) \\ &= (Q_1 + \lambda Q_2)A + R_{P_1} + \lambda R_{P_2} \end{aligned}$$
   Avec $\deg(R_{P_1} + \lambda R_{P_2}) \leq \max(\deg(R_{P_1}), \deg(\lambda R_{P_2})) < \deg(A)$. Donc, par unicité de la division euclidienne, $R_{P_1} + \lambda R_{P_2} = R_{P_1 + \lambda P_2}$, ainsi
   $$\Phi_A(P_1 + \lambda P_2) = \Phi_A(P_1) + \lambda \Phi_A(P_2).$$
   (b) Si $\deg(A) = 1$, $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\deg(\Phi_A(P)) < \deg(A) = 1$, donc $\mathrm{Im}(\Phi_A(P)) \subset \mathrm{Vect}\{1\}$. De plus, pour tout $k \in \mathrm{Vect}\{1\}$, $\Phi_A(A + k) = k$, donc
   $$\mathrm{Im}(\Phi_A(P)) = \mathrm{Vect}\{1\}$$
   Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi_A)) = \dim(\mathbb{K}_n[X]) - \dim(\mathrm{Im}(\Phi_A)) = n + 1 - 1 = n$. De plus, $\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $\Phi_A(P \cdot A) = 0$, d'où
   $$\mathrm{Ker}(\Phi_A(P)) = \mathrm{Vect}\{A, A \cdot X, \dots, A \cdot X^{n-1}\}.$$
2. (a) On sait que $X^n - 1 = (X - 1) \cdot (X^{n-1} + \ldots + X + 1)$, donc
   $$X^n = (X - 1) \cdot (X^{n-1} + \ldots + X + 1) + 1.$$
   Le reste de la division euclidienne de X^n par $X-1$ est donc 1, car $\deg(1) = 0 < 1 = \deg(X-1)$. *(Cela peut également être démontré par récurrence sur n.)*
   (b) Pout tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\Phi_{X-1}(X^k) = 1$ d'après la question précédente. Ainsi :
   $$\mathrm{Mat}_{B_c}(\Phi_{X-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$$
3. (a) Notons $d = \deg(A)$, alors $\forall k \in \{0, \dots, d-1\}$, $\Phi_A(X^k) = X^k$ car $\deg(X^k) = k < d = \deg(A)$. De plus, $\forall k \in \{0, \dots, n-d\}$, $\deg(A \cdot X^k) = d + k \leq n$, donc $A \cdot X^k \in \mathbb{K}_n[X]$. Nous obtenons alors $\Phi_A(A \cdot X^k) = 0$, car $A \cdot X^k$ est un multiple de A.
   La famille $B = (1, X, \dots, X^{d-1}, A, A \cdot X, \dots, AX^{n-d})$ est échelonnée en degré, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Dans cette base on a par construction :
   $$\mathrm{Mat}_B(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
   Cette matrice est bien diagonale.
   (b) On obtient que $\mathrm{Ker}(\Phi_A) = \mathrm{Vect}(A, A \cdot X, \dots, AX^{n-d})$ et que $\mathrm{Im}(\Phi_A) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$. Par le théorème du rang,
   $$\dim(\mathrm{Im}(\Phi_A)) + \dim(\mathrm{Ker}(\Phi_A)) = \dim(\mathbb{K}_n[X]).$$
   De plus, le seul polynôme multiple de A de degré strictement plus petit (à la fois dans le noyau et dans l'image de Φ_A) est le polynôme nul. Ainsi, $\mathrm{Im}(\Phi_A) \cap \mathrm{Ker}(\Phi_A) = \{0\}$. Ces deux espaces sont donc bien supplémentaires dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 3. Deux développements limités (/6)
Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 des deux fonctions suivantes :

1. $x \to \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $x \to \sin\left(\cos(x)^2 - 1\right)$

Correction :

1. On sait que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} &=_0 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot(-x)^2 + o(x^2)\\ &=_0 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

(Ce développement limité peut être obtenu en deux étapes, en composant celui de $\sqrt{1-x}$*, puis celui de* $\frac{1}{1+x}$ *en* 0*).*
Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =_0 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\frac{(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}} &=_0 (1-x)^2\cdot\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)\right).\\ &=_0 (1-2x+x^2)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4\right) + o(x^4)\\ &=_0 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - 2x - x^3 - \frac{3}{4}x^5 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^6 + o(x^4)\\ &=_0 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - x^3 + \frac{7}{8}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

2. On sait que

$$\cos(x) =_0 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}o(x^4),$$

donc,

$$\begin{aligned}\cos(x)^2 &=_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)\\ &=_0 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{24^2} + o(x^4)\\ &=_0 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)^2 - 1 = 0$, nous pouvons composer avec le développement limité de sin en 0, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sin\left(\cos(x)^2-1\right) &=_0 \sin\left(-x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)\\ &=_0 -x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{1}{6}\left(-x^2+\frac{x^4}{3}\right)^3 + o(x^4)\\ &=_0 -x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\end{aligned}$$

Exercice 4. Suite construite à partir d'une fonction (/5)

Soient $a > 0$ et $b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Déterminer un équivalent "simple" quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$.
2. Même question pour $e^{-a}f_n(a) - 1 + \dfrac{a^2}{2n}$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, commençons par déterminer le développement limité de $f_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} &=_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&=_{n\to+\infty} e^{x - \frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} =_{n\to+\infty} e^x e^{-\frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&=_{n\to+\infty} e^x \cdot \left(1 + \frac{-x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&=_{n\to+\infty} e^x - e^x\frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

En appliquant ce développement limité pour $x = a$, $x = b$ et $x = a + b$ on obtient :

$$\begin{aligned}
f_n(a) &=_{n\to+\infty} e^a - e^a\frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\
f_n(b) &=_{n\to+\infty} e^b - e^b\frac{b^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\
f_n(a+b) &=_{n\to+\infty} e^{a+b} - e^{a+b}\frac{(a+b)^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Par produit de développement limité :

$$\begin{aligned}
f_n(a)f_n(b) &=_{n\to+\infty} \left(e^a - e^a\frac{a^2}{2n}\right)\left(e^b - e^b\frac{b^2}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&=_{n\to+\infty} e^a e^b - e^a e^b\frac{b^2}{2n} - e^b e^a\frac{a^2}{2n} + e^a e^b\frac{a^2b^2}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&=_{n\to+\infty} e^{a+b} - e^{a+b}\frac{b^2+a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) &=_{n\to+\infty} \left(e^{a+b} - e^{a+b}\frac{(a+b)^2}{2n}\right) - \left(e^{a+b} - e^{a+b}\frac{b^2+a^2}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&=_{n\to+\infty} -e^{a+b}\frac{2ab}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&=_{n\to+\infty} -e^{a+b}\frac{ab}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

De ce fait, $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) \sim_{n\to+\infty} -e^{a+b}\dfrac{ab}{n}$.

2. Similairement à la question 1 on a :

$$\begin{aligned}
e^{-a}f_n(a) &=_{n\to+\infty} e^{-a}e^{n\left(\frac{a}{n}-\frac{a^2}{2n^2}+\frac{a^3}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}\\
&=_{n\to+\infty} e^{-a+a-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\\
&=_{n\to+\infty} e^{-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\\
&=_{n\to+\infty} 1-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&=_{n\to+\infty} 1-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}+\frac{a^4}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $e^{-a}f_n(a)-\left(1-\frac{a^2}{2n}\right)) \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^4}{8}\right)\frac{1}{n^2}$.