Lyon 1 Université Semestre de printemps 2025-2026
Cursus prépa 1A : Analyse 2 - Algèbre 2 22 Avril 2026

Devoir CUPGE n° 4 - 1h30

L'usage ou la possession de calculatrices, de téléphones ou d'autres appareils électroniques sont interdits.

La rédaction mathématique et la présentation de votre copie seront prises en compte dans la notation. (Le barème est indicatif et non définitif)

Exercice 1. Changement de base d'une application linéaire (/6)
Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $B_c = (e_1, e_2, e_3)$. On considère f un endomorphisme de E défini par sa matrice :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On note $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2$.

1. Déterminer des relations entre les vecteurs $f(e'_i)$ et les vecteurs e'_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
2. Montrer que $B = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
3. Déterminer M, la matrice de f dans la base B.
4. En déduire une expression de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant M, déterminer une expression de $f^n(e'_1 - e'_2 + e'_3)$.

Exercice 2. L'application "reste" (/8)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $A, P \in \mathbb{K}_n[X]$. Notons R_P le reste de la division euclidienne de P par A. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbb{K}_n[X] &\to \mathbb{K}_n[X] \\ P &\mapsto R_P \end{aligned}$$

1. (a) Montrer que Φ_A est une application linéaire.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi_A)$ et $\mathrm{Im}(\Phi_A)$ si $\deg(A) = 1$.
2. On suppose ici que $A = X - 1$.
   (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X - 1$.
   (b) Exprimer la matrice de Φ_A dans la base canonique $B_c = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. On considère A quelconque.
   (a) Déterminer une base B de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que $\mathrm{mat}_B(\Phi_A)$ est diagonale.
   (b) Est-ce que $\mathrm{Ker}(\Phi_A)$ et $\mathrm{Im}(\Phi_A)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}_n[X]$?

Tournez la page.

Exercice 3. Deux développements limités (/6)
Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 des deux fonctions suivantes :

1. $x \to \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $x \to \sin\big(\cos(x)^2 - 1\big)$

Exercice 4. Suite construite à partir d'une fonction (/4)
Soient $a > 0$ et $b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

1. Déterminer un équivalent "simple" quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$.
2. Même question pour $e^{-a} f_n(a) - 1 + \dfrac{a^2}{2n}$.