

Devoir CUPGE n° 3 - Correction

**Exercice 1. Suites récurrentes d'ordre deux ( /6)**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles, et soit  $F$  l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n.$$

1. Soit  $u \in F$  telle que  $u_0 = 3$  et  $u_1 = 4$ . Déterminer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. Déterminer une base de  $F$ .

**Correction :**

1. La suite  $u$  est récurrente d'ordre 2, donc il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ , avec  $r_1$  et  $r_2$  les solutions de l'équation  $r^2 = r + 6$ .

On considère le polynôme  $X^2 - X - 6$ ,  $\Delta = (-1)^2 + 24 = (5)^2$ , donc  $r_1 = -2$  et  $r_2 = 3$ . Pour déterminer  $\lambda$  et  $\mu$  on utilise les deux premiers termes de la suite :

$$\begin{cases} \lambda \cdot (-2)^0 + \mu \cdot (3)^0 = u_0 = 3 \\ \lambda \cdot (-2)^1 + \mu \cdot (3)^1 = u_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ -2\lambda + 3\mu = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-2)^n + 2 \cdot 3^n$ .

**2. Méthode 1 :**

Notons  $w$  la suite nulle, elle vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 0$ , en particulier,  $w_{n+2} = w_{n+1} + 6w_n$ . Ainsi  $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = w \in F$ . Soient  $u, v \in F$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} (\lambda u + v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(u_{n+1} + 6u_n) + (v_{n+1} + 6v_n) \\ &= (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + 6(\lambda u_n + v_n) \\ &= (\lambda u + v)_{n+1} + 6(\lambda u + v)_n \end{aligned}$$

Donc  $\lambda u + v \in F$ , ainsi  $F$  est stable par addition et par multiplication par un scalaire.  $F$  est donc un s.e.v de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**Méthode 2 :**

$$\begin{aligned} F &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \cdot (-2)^n + \mu \cdot 3^n\} \\ &= \{(\lambda \cdot (-2)^n + \mu \cdot 3^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu (3^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}\} \end{aligned}$$

Donc  $F$  est un s.e.v de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

3. En utilisant la méthode 2 de la question précédente, on trouve que  $((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille génératrice de  $F$ . De plus, ces deux suites sont non colinéaires (le rapport de leur premier terme est 1, et celui de leur deuxième terme est  $\frac{-2}{3}$ ), donc cette famille est libre. Ainsi  $((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $F$ .

**Exercice 2. Polynômes paires et impaires ( /7)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On considère les ensembles

$$F = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\},$$

$$G = \{P \in E \mid P(X) = -P(-X)\}.$$

1. Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. On admet que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que  $G \oplus F = E$
3. Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in F$ . Montrer que pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , si  $k$  est impaire alors  $a_k = 0$ .
4. Déterminer une base de  $F$  et en déduire sa dimension.
5. Donner la dimension de  $G$ , puis déterminer une base de  $G$ , dans cet ordre.

**Correction :**

1. Notons  $P_0$  le polynôme nul, alors  $P_0(X) = 0 = -0 = -P_0(-X)$ . Donc  $P_0 \in G$ .  
Soient  $P_1, P_2 \in G$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} (\lambda P_1 + P_2)(X) &= \lambda P_1(X) + P_2(X) = \lambda(-P_1(-X)) + (-P_2(-X)) \\ &= -(\lambda P_1(-X) + P_2(-X)) = -(\lambda P_1 + P_2)(-X) \end{aligned}$$

Donc  $\lambda P_1 + P_2 \in G$ , ainsi  $G$  est un s.e.v de  $E$ .

2. **Montrons que  $F \cap G = \{0_E\}$ .**

Soit  $P \in F \cap G$ , alors  $P(X) = P(-X)$  et  $P(X) = -P(-X)$ , donc  $P(X) = -P(X)$ , donc  $2P(X) = 0_E$ , donc  $P(X) = 0_E$ . Ainsi,  $F \cap G \subset \{0_E\}$ , de plus  $F$  et  $G$  sont des s.e.v de  $E$ , donc  $0_E \in F \cap G$ , et donc  $F \cap G = \{0_E\}$ .

**Montrons que  $F + G = E$ .** On a premièrement  $F + G \subset E$  car  $F$  et  $G$  sont des s.e.v de  $E$ . Soit  $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$ , montrons que ce polynôme peut se décomposer en la somme d'un polynôme de  $F$  et d'un polynôme de  $G$ . On a :

$$\begin{aligned} P(X) &= 2 \frac{P(X)}{2} = \frac{P(X)}{2} + \frac{P(X)}{2} + \frac{P(-X)}{2} - \frac{P(-X)}{2} \\ &= \frac{P(X) + P(-X)}{2} + \frac{P(X) - P(-X)}{2} \end{aligned}$$

Notons  $P_F(X) = \frac{P(X) + P(-X)}{2}$  et  $P_G(X) = \frac{P(X) - P(-X)}{2}$ , alors :

$$\begin{aligned} P_F(-X) &= \frac{P(-X) + P(X)}{2} = \frac{P(X) + P(-X)}{2} = P_F(X) \\ P_G(-X) &= \frac{P(-X) - P(X)}{2} = - \left( \frac{P(X) - P(-X)}{2} \right) = -P_G(X) \end{aligned}$$

Donc  $P_F \in F$  et  $P_G \in G$  avec  $P = P_F + P_G$ , donc  $G + F = E$ , et finalement,  $G \oplus F = E$ .

3. Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in F$ , on a  $P(X) = P(-X)$ , donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k (-X)^k \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} X^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} a_{2k+1} X^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} (-X)^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} a_{2k+1} (-X)^{2k+1} \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} X^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} a_{2k+1} X^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} X^{2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} a_{2k+1} X^{2k+1} \\
& \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} a_{2k+1} X^{2k+1} = - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} a_{2k+1} X^{2k+1} \\
& \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} 2a_{2k+1} X^{2k+1} = 0_E
\end{aligned}$$

Or un polynôme est nul si et seulement si chacun de ses coefficients sont nul, donc  $\forall k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ ,  $2a_{2k+1} = 0$  et donc  $a_{2k+1} = 0$ . Tous les coefficients impaires de  $P$  sont nuls.

4. Si  $n$  est paire, on a :

$$\begin{aligned}
F &= \{P \in E \mid P(X) = a_0 + a_2 X^2 + \dots + a_{n-2} X^{n-2} + a_n X^n, a_0, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_0 + a_2 X^2 + \dots + a_{n-2} X^{n-2} + a_n X^n \mid \forall a_0, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}\{1, X^2, \dots, X^{n-2}, X^n\}
\end{aligned}$$

La famille  $(1, X^2, \dots, X^{n-2}, X^n)$  est génératrice de  $F$ , et libre car ses éléments sont des polynômes de degrés deux à deux distincts, donc c'est une base de  $F$  et  $\dim(F) = \frac{n}{2} + 1$ .

De même, si  $n$  est impaire on montre que  $(1, X^2, \dots, X^{n-3}, X^{n-1})$ , est une base de  $F$  et donc  $\dim(F) = \frac{n-1}{2} + 1$ .

5. Comme  $G \oplus F = E$ , nous avons  $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$ . Donc si  $n$  est paire,  $\dim(G) = n + 1 - \frac{n}{2} - 1 = \frac{n}{2}$ . De plus, on montre comme dans la question précédente qu'une base de  $G$  est alors  $(X, X^3, \dots, X^{n-3}, X^{n-1})$ .

Si  $n$  est impaire, on obtient que  $\dim(G) = n + 1 - \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n+1}{2}$ , et une base de  $G$  est  $(X, X^3, \dots, X^{n-2}, X^n)$ .

### Exercice 3. Calcul d'une intégrale atypique ( /7)

L'objectif est de calculer l'intégrale  $I_n = \int_0^{n\pi} \ln(|\sin(t)|) dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$ .

*Remarque :* Les questions peuvent être résolues en admettant les résultats qui la précède.

1. En utilisant un changement de variable adapté, montrer que  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$ .

2. En déduire que  $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt$ .

3. Montrer, en utilisant un changement de variable, que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt = I$ .

4. En déduire la valeur de  $I$ , puis de  $I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Correction :**

1. Posons  $t = \frac{\pi}{2} - u$ , alors  $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$\sin(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin(-u) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(-u) = \cos(u)$$

De plus,  $dt = -du$ , en  $t = 0$ ,  $u = \frac{\pi}{2}$  et en  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $u = 0$ . Ainsi, en effectuant le changement de variable on a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\cos(u)) \cdot (-du) = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\cos(u)) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u)) du$$

2. On a :

$$\begin{aligned} 2I &= I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) \end{aligned}$$

3. Posons  $u = 2t$ , alors  $du = 2dt$ , donc  $dt = \frac{du}{2}$ . Pour  $t = 0$ ,  $u = 0$  et pour  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $u = \pi$ . Ainsi par changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt &= \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u)) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du \right) \end{aligned}$$

Or par le changement de variable  $t = \pi - u$ , on montre que  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u)) du = I$ , d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt = \frac{2I}{2} = I.$$

4. En utilisant question 2) on a :

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) - \ln(2) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2) dt = I - \frac{\pi}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

Donc  $I = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$ . De plus,  $t \rightarrow |\sin(t)|$  est  $\pi$ -périodique, donc  $t \rightarrow \ln(|\sin(t)|)$  l'est également, ainsi  $I_n = n \int_0^{\pi} \ln(|\sin(t)|) dt$ . Comme montré dans la question 3,  $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) dt = 2I$ , d'où  $I_n = 2n \cdot (-\frac{\pi}{2} \ln(2)) = -n\pi \ln(2)$ .