Lyon 1 Université — Semestre de printemps 2025-2026

Cursus prépa 1A : Analyse 2 - Algèbre 2 — 25 Mars 2026

Devoir CUPGE n° 3 - 1h30

L'usage ou la possession de calculatrices, de téléphones ou d'autres appareils électroniques sont interdits.

La rédaction mathématique et la présentation de votre copie seront prises en compte dans la notation. (Le barème est indicatif et non définitif)

Exercice 1. Suites récurrentes d'ordre deux (/6)
Soit E l'espace vectoriel des suites réelles, et soit F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n.$$

1. Soit $u \in F$ telle que $u_0 = 3$ et $u_1 = 4$. Déterminer une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Déterminer une base de F.

Exercice 2. Polynômes paires et impaires (/7)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère les ensembles

$$F = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\},$$
$$G = \{P \in E \mid P(X) = -P(-X)\}.$$

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
2. On admet que F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $G \oplus F = E$
3. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in F$. Montrer que pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, si k est impaire alors $a_k = 0$.
4. Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.
5. Donner la dimension de G, puis déterminer une base de G, dans cet ordre.

Exercice 3. Calcul d'une intégrale atypique (/7)

L'objectif est de calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \ln(\sin(t))dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$.

Remarque : *Les questions peuvent être résolues en admettant les résultats qui la précède.*

1. En utilisant un changement de variable adapté, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt$.
2. En déduire que $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt$.
3. Montrer, en utilisant un changement de variable, que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(2t)\right) dt = I$.
4. En déduire la valeur de I, puis de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.