
Devoir CUPGE n° 2 - Correction

Exercice 1. Exercice classique (/5)

On considère les trois vecteurs $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ définis par $u = (2, -2, 2)$, $v = (2, 1, 1)$, $w = (1, -7, 3)$, ainsi que l'ensemble :

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z = 0\}.$$

1. Montrer que G est sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. La famille (u, v, w) est-elle libre dans \mathbb{R}^3 ?
3. On note $F = \text{Vect}(u, v, w)$.
 - (a) Montrer que $F \subset G$
 - (b) Déterminer une base de G , puis en déduire sa dimension.

Correction :

1. On a $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$, et $2 \cdot 0 - 0 - 3 \cdot 0 = 0$, donc $0_{\mathbb{R}^3} \in G$.
Soient $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in G$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$v_1 + \lambda v_2 = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

De plus, $v_1, v_2 \in G$ donc $2x_1 - y_1 - 3z_1 = 0$ et $2x_2 - y_2 - 3z_2 = 0$. D'où :

$$\begin{aligned} 2(x_1 + \lambda x_2) - (y_1 + \lambda y_2) - 3(z_1 + \lambda z_2) &= (2x_1 - y_1 - 3z_1) + \lambda(2x_2 - y_2 - 3z_2) \\ &= 0 + \lambda \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $v_1 + \lambda v_2 \in G$, donc G est un s.e.v de \mathbb{R}^3 .

2. Vérifions si (u, v, w) est une famille libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $au + bv + cw = (0, 0, 0)$, on obtient alors le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ -2a + b - 7c = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ 3b - 6c = 0 \\ -b + 2c = 0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ 0 = 0 \\ -b + 2c = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2}c \\ b = 2c \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $(a, b, c) = (\frac{5}{2}, 2, 1)$ on a $au + bv + cw = (0, 0, 0)$, c'est à dire :

$$\frac{5}{2}u + 2v + w = (0, 0, 0)$$

La famille (u, v, w) est donc liée.

3. (a) Soit $p \in F$, alors, par définition de F , $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $p = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$. De plus, nous pouvons vérifier que $u, v, w \in G$. En effet :

$$2 \cdot 2 - (-2)0 - 3 \cdot 2 = 0,$$

$$2 \cdot 2 - 1 - 3 \cdot 1 = 0,$$

$$2 \cdot 1 - (-7) - 3 \cdot 3 = 0.$$

De plus, G est un s.e.v, et donc stable par combinaison linéaire. Ainsi, $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w \in G$ et donc $p \in G$. On a bien montré que $F \subset G$.

- (b) On a :

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3z = y\} \\ &= \{(x, 2x - 3z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect} \{(1, 2, 0), (0, -3, 1)\}. \end{aligned}$$

Donc $\{(1, 2, 0), (0, -3, 1)\}$ est une famille génératrice de G . De plus les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, la famille est donc libre, ce qui en fait une base de G . On a alors $\dim(G) = 2$.

Exercice 2. Un système à paramètre (/6)

Soit $p \in \mathbb{R}$ un paramètre, on considère la matrice $M_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & p^2 - 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs de p pour lesquelles M_p est inversible.

(En cas de difficultés, vous pouvez choisir de résoudre seulement une partie de la question : le cas particulier $p=1$)

2. En déduire, en fonction des valeurs de p , l'ensemble des solutions S_p du système :

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y = 5 \\ 3x + 4y + (p^2 - 5)z = p + 5 \end{cases}$$

Correction :

1. Soit $p \in \mathbb{R}$. Une matrice est inversible si et seulement si lors de l'exécution du pivot de Gauss, aucune ligne ou colonne de zéros apparaît :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & p^2 - 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & p^2 - 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & p^2 - 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

Il n'y a pas de ligne de zéros si et seulement si $p^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq 2$ et $p \neq -2$. Donc M_p est inversible pour tout $p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

2. On considère la matrice augmentée associée au système, sur laquelle on réalise un pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & p^2 - 5 & p + 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & p^2 - 2 & p - 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p^2 - 4 & p - 2 \end{pmatrix}$$

Si $p \neq 2$ et $p \neq -2$ on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p^2 - 4 & p - 2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{p+2} \end{pmatrix} L_3 \leftarrow \frac{L_3}{(p-2)(p+2)} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 + \frac{1}{p+2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 - 2\frac{1}{p+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{p+2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 + \frac{3}{p+2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \frac{2}{p+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{p+2} \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{aligned}$$

D'où $x = 1 + \frac{3}{p+2} = \frac{p+5}{p+2}$, $y = 1 - \frac{2}{p+2} = \frac{p}{p+2}$ et $z = \frac{1}{p+2}$.

Si $p = 2$, on résout le système $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + 2z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$, qui a une infinité de solutions.

Si $p = -2$ on résout le système $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + 2z = 1 \\ 0 = -4 \end{cases}$ qui n'a pas de solution.

Exercice 3. Fractions rationnelles (/5)

1. Réaliser la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{2X^2 - 8X - 2}{(X - 1)^2(X + 1)^2}$.

2. Soit $n \geq 2$, en déduire une expression de la somme $v_n = \sum_{k=2}^n \frac{2k^2 - 8k - 2}{(k - 1)^2(k + 1)^2}$.

Correction :

1. On a $\deg(2X^2 - 8X - 2) = 2 < 4 = \deg((X - 1)^2(X + 1)^2)$, donc d'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{2X^2 - 8X - 2}{(X - 1)^2(X + 1)^2} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{(X + 1)^2}.$$

En multipliant par $(X - 1)^2$ et en évaluant en $X = 1$ on a :

$$\frac{2(1)^2 - 8 \cdot 1 - 2}{(1 + 1)^2} = 0 + b + 0 + 0$$

Donc $b = -2$. De même, en multipliant par $(X + 1)^2$ et en évaluant en $X = -1$ on obtient $d = 2$.

Pour déterminer a et c , il est nécessaire d'utiliser d'autres techniques. Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{2x^2 - 8x - 2}{(x - 1)^2(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{a}{x - 1} + \frac{-2}{(x - 1)^2} + \frac{c}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2} \right)$$

donc $0 = a + c$. Finalement, en évaluant en $X = 0$ on obtient :

$$\frac{-2}{(-1)^2 1^2} = \frac{a}{-1} + \frac{-2}{(-1)^2} + \frac{c}{1} + \frac{2}{1^2},$$

d'où $-2 = 2c$, donc $c = -1$ et $a = 1$. Finalement nous avons :

$$\frac{2X^2 - 8X - 2}{(X - 1)^2(X + 1)^2} = \frac{1}{X - 1} - \frac{2}{(X - 1)^2} - \frac{1}{X + 1} + \frac{2}{(X + 1)^2}.$$

2. Soit $n \geq 2$. D'après la question précédente, pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, on a :

$$\frac{2k^2 - 8k - 2}{(k-1)^2(k+1)^2} = \frac{1}{k-1} - \frac{2}{(k-1)^2} - \frac{1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)^2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=2}^n \frac{2k^2 - 8k - 2}{(k-1)^2(k+1)^2} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{(k-1)^2} - \frac{1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)^2} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k-1)^2} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k+1)^2} - \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k-1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{2}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{(n+1)^2} - 2 - \frac{2}{4} \\ &= \frac{2-n}{n^2} + \frac{1-n}{(n+1)^2} - 1 \end{aligned}$$

Exercice 4. Banque CCINP 2024 (/4)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $F = \{P - P' \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ et la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P - P' \end{aligned}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que f est bijective.
3. Déterminer la dimension de F .

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et notons $P_0 = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ le polynôme nul. Pour montrer que $P_0 \in F$, il faut trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_0 = P - P'$, or pour $P = P_0$ on a $P'_0 = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, donc $P_0 = P_0 - P'_0$, ainsi $P_0 \in F$.

Soient $Q_1, Q_2 \in F$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe donc $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $Q_1 = P_1 - P'_1$ et $Q_2 = P_2 - P'_2$. On a :

$$\begin{aligned} Q_1 + \lambda Q_2 &= P_1 - P'_1 + \lambda(P_2 - P'_2) = (P_1 + \lambda P_2) - (P'_1 + \lambda P'_2) \\ &= (P_1 + \lambda P_2) - (P_1 + \lambda P_2)' = P_3 - P'_3, \end{aligned}$$

avec $P_3 = P_1 + \lambda P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc $Q_1 + \lambda Q_2 \in F$, et F est un s.e.v de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrons que f est injective. Soient $P_1, P_2 \in F$ tels que $f(P_1) = f(P_2)$, alors $P_1 - P'_1 = P_2 - P'_2$. Donc $P_1 - P_2 = P'_1 - P'_2 = (P_1 - P_2)'$, cependant, le seul polynôme étant égal à son polynôme dérivé est le polynôme nul. Ainsi $P_1 - P_2 = 0$ et donc $P_1 = P_2$, f est injective.

Montrons maintenant que f est surjective. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\begin{aligned}
 Q = f(P) &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n b_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1} X^k \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n b_k X^k = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - (k+1)a_{k+1}) X^k \\
 &\Leftrightarrow a_n = b_n \text{ et } a_k - (k+1)a_{k+1} = b_k, \forall k \in \{0, \dots, n-1\} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} - na_n = b_{n-1} \\ a_{n-2} - (n-1)a_{n-1} = b_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 - a_1 = b_0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} + nb_n \\ a_{n-2} = b_{n-2} + (n-1)b_{n-1} + n(n-1)b_n \\ \vdots \\ a_0 = b_0 + b_1 + 2b_2 + \dots + n!b_n \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nous venons de construire un antécédent de Q pour Q quelconque, donc f est surjective. Elle est donc bijective.

- On considère la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, et prenons son image par f . On obtient la famille $(1, X - 1, X^2 - 2X, \dots, X^n - nX^{n-1})$ qui est échelonné en degré, c'est donc une famille libre de F , ainsi $\dim(F) \geq \text{Card}(1, X - 1, X^2 - 2X, \dots, X^n - nX^{n-1}) = n + 1$. De plus, $F \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\dim(F) \leq \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$, d'où $\dim(F) = n + 1$.