
Devoir CUPGE n° 2 - 1h30

L'usage ou la possession de calculatrices, de téléphones ou d'autres appareils électroniques sont interdits.

La rédaction mathématique et la présentation de votre copie seront prises en compte dans la notation. (Le barème est indicatif et non définitif)

Exercice 1. Exercice classique (/5)

On considère les trois vecteurs $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ définis par $u = (2, -2, 2)$, $v = (2, 1, 1)$, $w = (1, -7, 3)$, ainsi que l'ensemble :

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z = 0\}.$$

1. Montrer que G est sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. La famille (u, v, w) est-elle libre dans \mathbb{R}^3 ?
3. On note $F = \text{Vect}(u, v, w)$.
 - (a) Montrer que $F \subset G$
 - (b) Déterminer une base de G , puis en déduire sa dimension.

Exercice 2. Un système à paramètre (/6)

Soit $p \in \mathbb{R}$ un paramètre, on considère la matrice $M_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & p^2 - 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs de p pour lesquelles M_p est inversible.
(En cas de difficultés, vous pouvez choisir de résoudre seulement une partie de la question : le cas particulier $p=1$)
2. En déduire, en fonction des valeurs de p , l'ensemble des solutions S_p du système :

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y = 5 \\ 3x + 4y + (p^2 - 5)z = p + 5 \end{cases}$$

Exercice 3. Fractions rationnelles (/5)

1. Réaliser la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{2X^2 - 8X - 2}{(X - 1)^2(X + 1)^2}$.
2. Soit $n \geq 2$, en déduire une expression de la somme $v_n = \sum_{k=2}^n \frac{2k^2 - 8k - 2}{(k - 1)^2(k + 1)^2}$.

Exercice 4. Banque CCINP 2024 (/4)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $F = \{P - P' \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ et la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P - P' \end{aligned}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que f est bijective.
3. Déterminer la dimension de F .