

Devoir CUPGE n° 1 - Correction

Exercice 1. Questions et applications du cours (/4)

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2$.
2. Soit $f :]0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$, donner la définition (*avec quantificateurs*) de "f est continue en π ".
3. Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \ln(x)}{e^{x^2}}$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} \\ &= \operatorname{ch}(2x) \end{aligned}$$

2. Cf cours.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $Y = x^2$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \ln(x)}{e^{x^2}} &= \lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{Y^{\frac{1}{4}} + \ln(\sqrt{Y})}{e^Y} \\ &= \lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{Y^{\frac{1}{4}}}{e^Y} + \lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{Y})}{e^Y} \end{aligned}$$

Par les croissances comparées, $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{Y^{\frac{1}{4}}}{e^Y} = 0$ et $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(Y)}{e^Y} = 0$, de plus $\ln(\sqrt{Y}) = \frac{1}{2} \ln(Y)$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \ln(x)}{e^{x^2}} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Exercice 2. (/7) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer M^2 , puis déterminer $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $M^2 - 3M = \delta I_3$.
(b) En déduire que M est inversible et donner la matrice M^{-1} .
2. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$.
(b) Montrer l'unicité d'un tel couple.
3. Soit $n \geq 2$. En réalisant la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$, on obtient qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + (\alpha_n X + \beta_n)$.

- (a) En utilisant les racines du polynôme $X^2 - 3X + 2$, déterminer une expression de α_n et β_n .
 (b) En déduire une expression de M^n .

Correction :

1. (a) On a $M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, donc $M^2 - 3M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_3$, ainsi $\delta = -2$.
 (b) On a $M^2 - 3M = -2I_3$, donc $M(M - 3I_3) = -2I_3$, donc $M \frac{1}{-2}(M - 3I_3) = I_3$. Il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $MB = I_3$ donc M est inversible et :

$$M^{-1} = B = \frac{1}{-2}(M - 3I_3) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

2. (a) Pour tous $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition " $\exists(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$ ".
Initialisation : Pour $n = 0$, nous avons $M^0 = I_3 = 0 \cdot M + 1 \cdot I_3$. Posons $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, alors la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai également :
 Par hypothèse de récurrence, $\exists(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$, or $M^{n+1} = M^n \cdot M$, donc :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= (a_n M + b_n I_3)M = a_n M^2 + b_n M \\ &= a_n(3M - 2I_3) + b_n M, \text{ Par la question 1.a,} \\ &= (3a_n + b_n)M - 2a_n I_3 \end{aligned}$$

Posons $a_{n+1} = 3a_n + b_n \in \mathbb{R}$ et $b_{n+1} = -2a_n \in \mathbb{R}$, nous avons donc $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I_3$, ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Finalement nous avons montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$.

- (b) Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3 = \alpha_n M + \beta_n I_3$. Montrons que $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$. En écrivant les termes de la matrice $a_n M + b_n I_3$ et de la matrice $\alpha_n M + \beta_n I_3$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} b_n & a_n & -a_n \\ -3a_n & 4a_n + b_n & -3a_n \\ -a_n & a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_n & \alpha_n & -\alpha_n \\ -3\alpha_n & 4\alpha_n + \beta_n & -3\alpha_n \\ -\alpha_n & \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}$$

Deux matrices sont égales si chacun de leur termes sont égaux, ainsi, en considérant les termes en première ligne première colonne on a $b_n = \beta_n$, et en considérant le terme en première ligne deuxième colonne on a $a_n = \alpha_n$. Il y a bien unicité du couple (a_n, b_n) .

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons que $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $X^n = (X - 1)(X - 2)Q + (\alpha_n X + \beta_n)$. En évaluant en $X = 1$ puis en $X = 2$ on obtiens le système :

$$\begin{cases} 1^n &= (1 - 1)(1 - 2)Q(1) + \alpha_n \cdot 1 + \beta_n \\ 2^n &= (2 - 1)(2 - 2)Q(2) + \alpha_n \cdot 2 + \beta_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 &= \alpha_n + \beta_n \\ 2^n &= 2\alpha_n + \beta_n \end{cases} \quad (1)$$

En résolvant le système on a $\alpha_n = 2^n - 1$ et $\beta_n = 2 - 2^n$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, en évaluant le polynôme X^n en la matrice M on a :

$$\begin{aligned} M^n &= (M^2 - 3M + 2I_3)Q(M) + (\alpha_n M + \beta_n) \\ &= \alpha_n M + \beta_n, \text{ car } M^2 - 3M + 2I_3 = 0 \text{ par la question 1.a.} \\ &= (2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_3 = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & -2^n + 1 \\ -3(2^n - 1) & 4(2^n - 1) + (2 - 2^n) & -3(2^n - 1) \\ -2^n + 1 & 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3. (/7) On définit deux suites réelles u et S par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n k^2, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}.$$

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^3$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) + 3u_n + \frac{n(3n+5)}{2}.$$

(b) En déduire (*sans raisonnement par récurrence*) que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. On note h la suite de terme générale $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) Déterminer trois réels a , b et c tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, :

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = h_{2n+1} - \frac{1}{2}h_n - 1$.

(c) En déduire une expression de S_n en fonction des termes de la suite h .

(d) Nous admettons qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ tels que $\forall n \geq 2$:

$$h_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n.$$

En déduire la limite de la suite S en $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Correction :

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, par la formule du binôme de Newton on a $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1)^3 &= \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n 3k^2 + \sum_{k=1}^n 3k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3u_n + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3u_n + \frac{3n(n+1) + 2n}{2} \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3u_n + \frac{3n^2 + 5n}{2} \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 1.(a) on a :

$$\begin{aligned}
 3u_n &= \sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3 - \frac{3n^2 + 5n}{2} \\
 &= (n+1)^3 + \sum_{k=2}^n k^3 - \sum_{k=2}^n k^3 - 1 - \frac{3n^2 + 5n}{2} \\
 &= (n+1)^3 - \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = (n+1)^3 - \frac{(n+1)(3n+2)}{2} \\
 &= (n+1) \left((n+1)^2 - \frac{3n+2}{2} \right) = (n+1) \frac{2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2}{2} \\
 &= (n+1) \frac{2n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

Ainsi $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$. (Nous pourrions utiliser les techniques de décomposition en éléments simples, on suppose dans cette correction qu'elles n'ont pas encore été vues.) En mettant au même dénominateur on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} &= \frac{a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1)}{n(n+1)(2n+1)} \\
 &= \frac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)}
 \end{aligned}$$

Par identification des coefficients du polynôme au numérateur on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3a + b + c = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

Ainsi $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}h_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\
 &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} - 1 \\
 &= h_{2n+1} - 1
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = h_{2n+1} - \frac{1}{2}h_n - 1$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+1)(2k+1)}, \quad \text{par la question 1.(b),} \\
 &= \sum_{k=1}^n 6 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1} \right), \quad \text{par la question 2.(a),} \\
 &= 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 24 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \\
 &= 6h_n + 6 \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 \right) - 24 \left(h_{2n+1} - \frac{1}{2}h_n - 1 \right), \quad \text{par la question 2.(b),} \\
 &= (6+12)h_n + 6h_{n+1} - 6 - 24h_{2n+1} + 24 \\
 &= 18h_n + 6h_{n+1} - 24h_{2n+1} + 18
 \end{aligned}$$

(d) Soit $n \geq 2$, en remplaçant h_n par son expression on obtient :

$$S_n = 18(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n) + 6(\ln(n+1) + \gamma + \varepsilon_{n+1}) - 24(\ln(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1}) + 18$$

De plus, $\ln(n+1) = \ln\left(n \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, et de même $\ln(2n+1) = \ln(2) + \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$, donc :

$$\begin{aligned}
 S_n &= (18+6)\ln(n) - 24\ln(n) + (18+6)\gamma - 24\gamma + 18\varepsilon_n + 6\varepsilon_{n+1} - 24\varepsilon_{2n+1} \\
 &\quad + 6\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 24\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 24\ln(2) + 18 \\
 &= \left(18\varepsilon_n + 6\varepsilon_{n+1} - 24\varepsilon_{2n+1} + 6\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 24\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) - 24\ln(2) + 18
 \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0 + -24\ln(2) + 18 = 18 - 24\ln(2)$

Exercice 4. (/3) Soit $n \geq 2$, notons $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer J^2 .
2. En déduire que M est inversible, et calculer son inverse.

Correction :

$$1. \text{ Soit } n \geq 2. \text{ On obtient } J^2 = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} = n \cdot J$$

2. Comme $J = M + I_n$, d'après la question 1 nous avons $(M + I_n)^2 = n(M + I_n)$, ainsi :

$$\begin{aligned}
 M^2 + 2M + I_n &= nM + nI_n \quad \Leftrightarrow \quad M^2 + (2-n)M = (n-1)I_3 \\
 &\Leftrightarrow \quad M \frac{1}{n-1} (M + (2-n)I_3) = I_3
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } M \text{ est inversible et } M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} \end{pmatrix}$$