Lyon 1 Université Semestre de printemps 2025-2026

Cursus prépa 1A : Analyse 2 - Algèbre 2 11 Mars 2026

Devoir surveillé n° 2 - 1h30

L'usage ou la possession de calculatrices, de téléphones ou d'autres appareils électroniques sont interdits.

La rédaction mathématique et la présentation de votre copie seront prises en compte dans la notation. (Le barème est indicatif et non définitif)

Exercice 1. Calcul d'intégrales (/6)

1. En passant par une décomposition en éléments simples, calculer l'intégrale :

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^2+4x+4} dx.$$

2. Soit $x, t \in \mathbb{R}$. En posant le changement de variable $x = \cos(t)$, calculer l'intégrale :

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)} dt.$$

Exercice 2. Famille à paramètre (/4)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $u = (-1, 2, 7, 3)$, $v = (5, 1, -3, -4)$ et $w = (2, 7, \alpha, 5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

1. Pour quelles valeurs de α cette famille est-elle libre ?
2. En déduire, en fonction de α, la valeur de $\dim(\mathrm{Vect}(u, v, w))$.

Exercice 3. Sous-espace vectoriel de polynômes (/6)

On considère l'ensemble :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \exists k \in \mathbb{R},\ P(1) = 3k,\ P(-1) = k,\ P(2) = k\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} P(1) & = & 3k \\ P(-1) & = & k \\ P(2) & = & k \end{array}\right.$.
3. En déduire une base de E.

Exercice 4. Famille de matrices à paramètre (/4)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $p_\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ et $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A_\theta)^n = A_{n\theta}$.
2. Déterminer les valeurs $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $(p_\theta, p_{2\theta})$ de $\mathbb{R}^2$ est libre.
3. Montrer que :

$$(p_\theta, p_{2\theta}) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \big(A_\theta, (A_\theta)^2\big) \text{ est libre}$$

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, en fonction de N et de θ, si la famille $\big(A_\theta, (A_\theta)^2, ..., (A_\theta)^N\big)$ est libre.