
Devoir Surveillé n°1
Durée : 1 h 30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Question de Cours : Rappeler la définition d'une famille libre et d'une famille génératrice.

Exercice 1. On note

$$f(x) = \lambda|x| - \sin(|x|).$$

1. Pour quel $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction est-elle dérivable en $x = 0$?
2. Pour $\lambda = 1$, calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x}.$$

Exercice 2. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{k+1} \right)$.

Exercice 3. On note

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système

$$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ pour } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $A^2 = 11A - 10I_3$.
3. En déduire que A est inversible et donner cet inverse.
4. Proposer une autre preuve pour la question 1 en utilisant la question 3.
5. Calculer $(A - I)^{10}$.

Indication : On pourra commencer par trouver une expression simple de $(A - I)^2$.

Exercice 4. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Calculer le produit de matrices pour $n \in \mathbb{N}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } a_k = \binom{n}{k}.$$