Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2025-2026
Cursus préparatoire/CCP, 1ère année — 23 avril 2026

Corrigé du Devoir surveillé n° 3bis

Exercice 1. *Soit* $u\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *l'application définie en posant, pour tout* $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ *:*

$$u(x, y, z, t) = (x + z + 3t, 2y + 2z + 4t, x + y + 2z + 5t, y + z + 2t).$$

1. *Montrer que u est une application linéaire.*
   Soit $e_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1), e_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
u(\lambda e_1 + e_2) &= u(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2, \lambda t_1 + t_2)\\
&= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda z_2 + z_2 + 3(\lambda t_1 + t_2, 2(\lambda y_1 + y_2) + 2(\lambda z_1 + z_2) + 4(\lambda t_1 + t_2),\\
&\quad \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + 2(\lambda z_1 + z_2) + 5(\lambda t_1 + t_2), \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2 + 2(\lambda t_1 + t_2)\\
&= \lambda(x_1 + z_1 + 3t_1, 2y_1 + 2z_1 + 4t_1, x_1 + y_1 + 2z_1 + 5t_1, y_1 + z_1 + 2t_1)\\
&\quad + (x_2 + z_2 + 3t_2, 2y_2 + 2z_2 + 4t_2, x_2 + y_2 + 2z_2 + 5t_2, y_2 + z_2 + 2t_2)\\
&= \lambda u(e_1) + u(e_2).
\end{aligned}$$

   On vient de prouver que u est une application linéaire.

2. *Déterminer une base de* $\ker(u)$*. L'application u est-elle injective ?*

   On peut par exemple échelonner en ligne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ En remplaçant L_3 par $L_3 - L_1$ on arrive à la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; puis on remplace L_3 par $2L_3 - L_2$ et L_4 par $2L_4 - L_2$ et on obtient que la matrice A est équivalente en lignes à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On en déduit que $u(x, y, z, t) = 0$ si, et seulement si, $y = -z - 2t$ et $x = -z - 3t$, autrement dit si, et seulement si,

$$(x, y, z, t) = (-z - 3t, -z - 2t, z, t) = z(-1, -1, 1, 0) + t(-3, -2, 0, 1).$$

   La famille $((-1, -1, 1, 0), (-3, -2, 0, 1))$ est donc une famille génératrice de $\ker(u)$, et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (la troisième coordonnée de l'un vaut 0 alors que la troisième coordonnée de l'autre est non nulle). On en déduit que cette famille est une base de $\ker(u)$.
   En particulier, $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$: u n'est pas injective.

3. *Déterminer une base de* $\mathrm{Im}(u)$*. L'application u est-elle surjective ?*
   Par le théorème du rang, on sait que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension $4 - \dim(\ker(u)) = 2$; de plus, la famille $((1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 1))$ est une famille de 2 vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(u)$, et en forme donc une base.
   L'application u n'est pas surjective puisque $\dim(\mathrm{Im}(u)) == 2$ alors que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

4. *A-t-on* $\mathbb{R}^4 = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ *?*
   Puisque $\dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, il nous reste à vérifier si $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.
   Soit e un vecteur appartenant à cette intersection. Comme $e \in \mathrm{Im}(u)$ on sait grâce au résultat de la question précédente qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $e = (a, 2b, a + b, b)$. En écrivant que $u(e) = 0$

on obtient $a = -(a+b) - 3b$ et $2b = -(a+b) - 2b$, autrement dit $2a = -4b$ et $a = -5b$. Ceci n'est possible que si $a = b = 0$, donc $e = 0$.
Finalement, puisque $\dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ et $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$ on conclut que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires.

Exercice 2. *On considère les ensembles*

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - 3z + t = 0\} \text{ et } F = \{(x,y,z,t) \in R^4 : x - y - z = 0 \text{ et } x - z + t = 0\}.$$

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. On admettra que c'est également le cas pour F.* On a bien $(0,0,0,0) \in E$; si $(x,y,z,t) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\lambda x + 2\lambda y - 3\lambda z + t = \lambda(x + 2y - 3z + t) = 0$$

donc $\lambda(x,y,z,e) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ appartient à E.
Soit (x,y,z,t), (x',y',z',t') deux éléments de E. On a :

$$(x+x') + 2(y+y') - 3(z+z') + (t+t') = (x + 2t - 3z + t) + (x' + 2y' - 3z' + t) = 0$$

donc $(x,y,z,t) + (x',y',z',t') = (x+x', y+y', z+z', t+t')$ appartient à E.
On a fini de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. *Déterminer une base de E et préciser sa dimension.*
En remarquant que E est le noyau d'une application linéaire non nulle de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}$ on pourrait directement dire que E est de dimension 3 ; mais revenons aux définitions. Déjà, notons que

$$\begin{aligned} u = (x,y,z,t) \in E &\Leftrightarrow t = -x - 2y + 3z \\ &\Leftrightarrow u = (x,y,z,-x-2y+3z) \\ &\Leftrightarrow y = x(1,0,-1,0) + y(0,1,0,-2) + z(0,0,1,3) \end{aligned}$$

La famille $((1,0,0,-1),(0,1,0,-2),(0,0,1,3))$ est donc une famille génératrice de E ; montrons qu'elle est libre. Pour cela, considérons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1(1,0,0,-1) + \lambda_2(0,1,0,-2) + \lambda_3(0,0,1,3) = (0,0,0,0)$. En regardant la première coordonnée on obtient $\lambda_1 = 0$; en regardant la deuxième coordonnée, $\lambda_2 = 0$; et la troisième coordonnée nous donne $\lambda_3 = 0$.
Finalement, la famille $((1,0,0,-1),(0,1,0,-2),(0,0,1,3))$ est une famille à la fois libre et génératrice de E : c'est une base, et E est donc de dimension 3.

3. *Déterminer une base de F et préciser sa dimension.* En raisonnant comme ci-dessus, on obtient que

$$u = (x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow u = (x, x-z, z, z-x) = x(1,1,0,-1) + z(0,-1,1,1).$$

Les deux vecteurs $(1,1,0,-1)$ et $(0,-1,1,1)$ sont non colinéaires donc forment une famille libre ; et on vient de montrer qu'ils forment une famille génératrice de F. Ils constituent donc une base de F qui est par conséquent de dimension 2.

4. *Déterminer une base de $E \cap F$ et préciser sa dimension.*
En reprenant les résultats ci-dessus, on sait que $u = (x,y,z,t) \in E \cap F$ si, et seulement si, $u = (x,y,z,-x-2y+3z)$ et $u = (x, x-z, z, z-x)$.
Cette égalité est équivalente à $y = x - z$ et $-x - 2y + 3z = z - x$, autrement dit à $y = x - z$ et $-2y + 2z = 0$, ou encore $x = 2z$ et $y = z$. Finalement, $u \in E \cap F$ si, et seulement si, $u = z(2,1,1,-1)$.
On vient de montrer que $(2,1,1,-1)$ est une base de $E \cap F$, qui est par conséquent de dimension 1.

5. *Montrer que $\mathbb{R}^4 = E + F$. A-t-on $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$?*
On peut appliquer la formule de Grassmann pour obtenir que

$$\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 3 + 2 - 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4).$$

Comme $E + F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, cette égalité entraîne que $E + F = \mathbb{R}^4$.
Puisque $E \cap F$ n'est pas réduit à $\{0\}$, on n'a pas $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

Exercice 3.

1. *Pour $t > 0$, calculer* $\displaystyle\int_1^t \frac{\arctan(\ln(x))}{x}\,dx$.
   Indication : on pourra effectuer un changement de variable puis une intégration par parties.
   Soit $t > 0$; notons $I(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{\arctan(\ln(x))}{x}\,dx$. À l'aide du changement de variables (de classe $\mathcal{C}^1$) $u = \ln(x)$, on obtient
   $$I(t) = \int_{\ln(1)}^{\ln(t)} \arctan(u)\,du = \int_0^{\ln(t)} \arctan(u)\,du.$$
   Une intégration par parties (licite, puisque les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto \arctan(u)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$) nous permet ensuite d'obtenir
   $$\begin{aligned} I(t) &= \Big[u\arctan(u)\Big]_0^{\ln(t)} - \int_0^{\ln(t)} \frac{u}{1+u^2} \\ &= \ln(t)\arctan(\ln(t)) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_0^{\ln(t)} \\ &= \ln(t)\arctan(\ln(t)) - \frac{1}{2}\ln(1+(\ln(t))^2). \end{aligned}$$
   On a utilisé sans commentaire dans les calculs précédents le fait que $\arctan(0) = 0$ et $\ln(1) = 0$.
2. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3+(\sin(t))^2}\sin(t)\,dt$.
   Indication : on pourra effectuer un changement de variable.
   On utilise le changement de variables $u = \cos(t)$; puisque $\cos(\pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $3 + (\sin(t))^2 = 4 - (\cos(t))^2$, on obtient
   $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3+(\sin(t))^2}\sin(t)\,dt = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{4-u^2} - du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{4-u^2}du.$$
   On observe ensuite que
   $$\frac{1}{4-u^2} = \frac{1}{(2-u)(2+u)} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u-2} + \frac{1}{u+2}\right)$$
   et on aboutit à
   $$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{4-u^2}du &= \frac{1}{4}\left(-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{du}{u-2} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{du}{u+2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\Big[-\ln(|u-2|)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 + \Big[\ln(|u+2|)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln(2-\sqrt{2}/2) + \ln(3) - \ln(2+\sqrt{2}/2)\right) \end{aligned}$$

Exercice 4. *Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On définit les fonctions c et s par*
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad c(x) = \cos(x) \text{ et } s(x) = \sin(x).$$
On note $E = \mathrm{Vect}(c,s)$.

1. *Déterminer la dimension de E et en donner une base.*
   L'espace E est engendré par deux fonctions non nulles et est donc de dimension 1 ou 2. Montrer que c et s ne sont pas colinéaires : si $\lambda \in \mathbb{R}$ est tel que $c = \lambda s$ alors on a en particulier $c(0) = \lambda s(0)$, donc $1 = 0$, une contradiction.
   Donc (c,s) est une famille de deux vecteurs non colinéaires : c'est une famille libre qui engendre E par définition. C'est donc une base de E, qui est par conséquent de dimension 2.

2. *Soit α, β, γ trois réels. Soient f, g, h les fonctions définies par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \cos(x+\alpha),\ g(x) = \cos(x+\beta) \text{ et } h(x) = \cos(x+\gamma).$$

(a) *Montrer que f, g, h appartiennent à E.*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \cos(x+\alpha) = \cos(x)\cos(\alpha) - \sin(x)\sin(\alpha) = \cos(\alpha)c(x) - \sin(\alpha)s(x).$$

Donc $f = \cos(\alpha)c - \sin(\alpha)s$ appartient à $E = \mathrm{Vect}(c, s)$. On montre de la même façon que g, h appartiennent à E.

(b)

(c) La famille (f, g, h) est-elle libre ?
C'est une famille à 3 éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 : elle ne peut pas être libre.

(d) *Déterminer le rang de (f, g, h), c'est-à-dire la dimension de* $\mathrm{Vect}(f, g, h)$.
Indication : on pourra distinguer plusieurs cas selon les valeurs de α, β, γ.
Comme f est non nulle, et E est de dimension 2, ce rang est nécessairement égal à 1 ou 2. Déterminons pour quelles valeurs de α, β la famille (f, g) est liée : cela arrive si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x+\alpha) = \lambda\cos(x+\beta)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On a alors $\cos(\alpha - \beta + \pi/2) = 0$, donc $\alpha - \beta + \pi/2 = \pi/2\ [\pi]$, ou encore $\alpha = \beta[\pi]$.
Réciproquement, si $\alpha = \beta\ [\pi]$ alors ou bien $\alpha = \beta\ [2\pi]$ et $f = g$, ou bien $\alpha = -\beta\ [2\pi]$ et alors $f = -g$.
On en déduit que la famille (f, g) est liée si, et seulement si, $\alpha = \beta\ [\pi]$. Si ce n'est pas le cas, le rang de la famille (f, g, h) est égal à 3.
Si jamais $\alpha = \beta\ [\pi]$, alors le même raisonnement nous donne que (f, h) est liée si, et seulement si, $\alpha = \gamma\ [\pi]$.
On a finalement obtenu le résultat suivant : si $\alpha = \beta = \gamma\ [\pi]$ alors (f, g, h) est de rang 1 ; sinon, (f, g, h) est de rang 2.