Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2025-2026

Cursus préparatoire/CCP, 1ère année — 23 avril 2026

Devoir surveillé n° 3bis

Durée 1h30

L'usage ***et la possession*** *de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction, le détail des calculs doit apparaître sur la copie et la présentation doit être la plus soignée possible.*

Exercice 1. Soit $u\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie en posant, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$u(x, y, z, t) = (x + z + 3t, 2y + 2z + 4t, x + y + 2z + 5t, y + z + 2t).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$. L'application u est-elle injective ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$. L'application u est-elle surjective ?
4. A-t-on $\mathbb{R}^4 = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$?

Exercice 2. On considère les ensembles

$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - 3z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in R^4 : x - y - z = 0 \text{ et } x - z + t = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. On admettra que c'est également le cas pour F.
2. Déterminer une base de E et préciser sa dimension.
3. Déterminer une base de F et préciser sa dimension.
4. Déterminer une base de $E \cap F$ et préciser sa dimension.
5. Montrer que $\mathbb{R}^4 = E + F$. A-t-on $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$?

Exercice 3.

1. Pour $t > 0$, calculer $\displaystyle\int_1^t \frac{\arctan(\ln(x))}{x}\, dx$.
   Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = \ln(x)$ *puis une intégration par parties.*
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3 + (\sin(t))^2} \sin(t)\, dt$.
   Indication : on pourra effectuer un changement de variable.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On définit les fonctions c et s par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad c(x) = \cos(x) \text{ et } s(x) = \sin(x).$$

On note $E = \mathrm{Vect}(c, s)$.

1. Déterminer la dimension de E et en donner une base.
2. Soit α, β, γ trois réels. Soient f, g, h les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \cos(x + \alpha),\ g(x) = \cos(x + \beta) \text{ et } h(x) = \cos(x + \gamma).$$

   (a) Montrer que f, g, h appartiennent à E.
   (b) La famille (f, g, h) est-elle libre ?
   (c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}(f, g, h)$.
   Indication : on pourra distinguer plusieurs cas selon les valeurs de α, β, γ.