Université Claude Bernard Lyon 1 — Semestre de printemps 2025-2026
Cursus préparatoire – Algèbre 2 et Analyse 2 — 1er avril 2026

Devoir Surveillé n°3 – Correction
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans la notation. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement justifiées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises. L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.

Veuillez indiquer votre groupe (P1,P2,P3,P4,P5) sur la copie.

Exercice 1. (5 points)

Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (2x - y + z + 3t, x + y - 2z + t, 3x + y - z + 4t).$$

1. (1pt) *Montrer que u est une application linéaire.*

   Soit (x, y, z, t), $(x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

   $$\begin{aligned}
   &u(\lambda(x, y, z, t) + (x', y', z', t')) = f((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t'))\\
   &\quad = (2(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z') + 3(\lambda t + t'), (\lambda x + x') + (\lambda y + y') - 2(\lambda z + z') + (\lambda t + t'),\\
   &\quad 3(\lambda x + x') + (\lambda y + y') - (\lambda z + z') + 4(\lambda t + t'))\\
   &\quad = \lambda(2x - y + z + 3t, x + y - 2z + t, 3x + y - z + 4t)\\
   &\quad + (2x' - y' + z' + 3t', x' + y' - 2z' + t', 3x' + y' - z' + 4t')\\
   &\quad = \lambda u(x, y, z, t) + u(x', y', z', t').
   \end{aligned}$$

   Donc u est une application linéaire.

2. (1,5pt) *Déterminer une base de $\ker u$. L'application u est-elle injective ?*

   Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

   $$\begin{aligned}
   (x, y, z, t) \in \ker u &\Leftrightarrow u(x, y, z, t) = (0, 0, 0)\\
   &\Leftrightarrow (2x - y + z + 3t, x + y - 2z + t, 3x + y - z + 4t) = (0, 0, 0)\\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z + 3t = 0\\ x + y - 2z + t = 0\\ 3x + y - z + 4t = 0 \end{cases}\\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 5z + t = 0\\ x + y - 2z + t = 0\\ -2y + 5z + t = 0 \end{cases}\\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0\\ x = 7z\\ t = -5z \end{cases}\\
   &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (7z, 0, z, -5z) = z(7, 0, 1, -5).
   \end{aligned}$$

   Donc $\ker u = \mathrm{Vect}\big((7, 0, 1, -5)\big)$. En particulier, $\ker u \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$, donc u n'est pas injective.

   Remarque : par le théorème du rang, on a directement que u n'est pas injective.

3. (2,5pts) *Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, u$. L'application u est-elle surjective ?*

   On a

   $$\begin{aligned}
   \mathrm{Im}\, u &= \{u(x, y, z, t) : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}\\
   &= \{(2x - y + z + 3t, x + y - 2z + t, 3x + y - z + 4t) : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}\\
   &= \{x(2, 1, 3) + y(-1, 1, 1) + z(1, -2, -1) + t(3, 1, 4) : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}\\
   &= \mathrm{Vect}\big((2, 1, 3), (-1, 1, 1), (1, -2, -1), (3, 1, 4)\big).
   \end{aligned}$$

Donc la famille $((2,1,3),(-1,1,1),(1,-2,-1),(3,1,4))$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$. Par le théorème du rang, on a $\dim\ker u + \dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{R}^4$, soit $1 + \dim \operatorname{Im} u = 4$, et $\dim \operatorname{Im} u = 3$. Donc il suffit d'extraire une famille libre à 3 éléments, par exemple $((2,1,3),(-1,1,1),(1,-2,-1))$. Montrons que cette famille est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\lambda_1(2,1,3) + \lambda_2(-1,1,1) + \lambda_3(1,-2,-1) = (0,0,0)& \\
&\Leftrightarrow (2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Donc la famille $((2,1,3),(-1,1,1),(1,-2,-1))$ est libre, donc c'est une base de $\operatorname{Im} u$. De plus, $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{R}^3$, donc $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^3$ et u est surjective.

Exercice 2. (6 points)

On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\big\}, \qquad G = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \text{ et } z - t = 0\big\}.$$

1. (1pt) *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. On admettra que G en est un également.*

   On a $0+0+0+0 = 0$, donc $(0,0,0,0) \in F$. Soit $(x,y,z,t), (x',y',z',t') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda(x,y,z,t) + (x',y',z',t') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$, et

   $$(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z') + (\lambda t + t') = \lambda(x+y+z+t) + (x'+y'+z'+t') = 0,$$

   donc $\lambda(x,y,z,t) + (x',y',z',t') \in F$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. (1,5pt) *Déterminer une base de F et préciser sa dimension.*

   Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

   $$\begin{aligned}
   (x,y,z,t) \in F &\Leftrightarrow x + y + z + t = 0 \\
   &\Leftrightarrow t = -x - y - z \\
   &\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (x,y,z,-x-y-z) = x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1),
   \end{aligned}$$

   donc la famille $((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$ est génératrice de F. Montrons qu'elle est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. On a

   $$\begin{aligned}
   \lambda_1(1,0,0,-1) + \lambda_2(0,1,0,-1) + \lambda_3(0,0,1,-1) = (0,0,0,0)& \\
   &\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0,0) \\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \end{cases}
   \end{aligned}$$

   donc la famille $((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$ est libre, donc c'est une base de F. Cette base a 3 éléments, donc $\dim F = 3$.
3. (1,5pt) *Déterminer une base de G et préciser sa dimension.*

   Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

   $$\begin{aligned}
   (x,y,z,t) \in G &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases} \\
   &\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (x,x,z,z) = x(1,1,0,0) + z(0,0,1,1),
   \end{aligned}$$

donc la famille $((1,1,0,0),(0,0,1,1))$ est génératrice de G. Montrons qu'elle est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\lambda_1(1,1,0,0)+\lambda_2(0,0,1,1)=(0,0,0,0) &\Leftrightarrow (\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2)=(0,0,0,0)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0,\end{cases}\end{aligned}$$

donc la famille $((1,1,0,0),(0,0,1,1))$ est libre, donc c'est une base de G. Cette base a 2 éléments, donc $\dim G = 2$.

4. (1pt) *Déterminer une base de $F \cap G$ et préciser sa dimension.*

   Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in F\cap G &\Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z+t=0\\ x-y=0\\ z-t=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}z=-x\\ x=y\\ z=t\end{cases}\\ &\Leftrightarrow (x,y,z,t)=(x,x,z,z)=(x,x,-x,-x)=x(1,1,-1,-1),\end{aligned}$$

   donc la famille $((1,1,-1,-1))$ est une base de $F\cap G$. Cette base a 1 élément (non nul), donc $\dim F\cap G = 1$.

5. (1pt) *Montrer que $\mathbb{R}^4 = F+G$. A-t-on $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?*

   Par la formule de Grassmann, on a $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F\cap G = 3+2-1 = 4$. On a donc $F+G \subset \mathbb{R}^4$ et $\dim F+G = \dim \mathbb{R}^4$, donc $\mathbb{R}^4 = F+G$. Par contre, $F\cap G \neq \{(0,0,0,0)\}$, donc $\mathbb{R}^4 \neq F\oplus G$.

Exercice 3. (7 points)

1. (3,5pts) *Calculer*

$$\int \frac{\ln(2+\arctan(x))}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

   Indication : On pourra effectuer un changement de variable puis une intégration par parties.

   Posons $y = \arctan(x)$. Alors

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

   et

$$\int \frac{\ln(2+\arctan(x))}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \ln(2+y)\,\mathrm{d}y.$$

   Posons maintenant, pour tout $y \in \mathbb{R}$, les fonctions $u(y) = \ln(2+y)$ et $v(y) = y$. Par intégration par parties, on a

$$\int \ln(2+y)\,\mathrm{d}y = \int u(y)v'(y)\,\mathrm{d}y = u(y)v(y) - \int u'(y)v(y)\,\mathrm{d}y = y\ln(2+y) - \int \frac{y}{2+y}\,\mathrm{d}y.$$

   De plus,

$$\frac{y}{2+y} = \frac{2+y-2}{2+y} = 1 - \frac{2}{2+y}.$$

   On a donc

$$\begin{aligned}\int \ln(2+y)\,\mathrm{d}y &= y\ln(2+y) - y + 2\int \frac{1}{2+y}\mathrm{d}y\\ &= y\ln(2+y) - y + 2\ln(2+y) + C \qquad (C\in\mathbb{R})\\ &= (2+y)\ln(2+y) - y + C.\end{aligned}$$

   En remplaçant $y = \arctan(x)$, on obtient finalement

$$\int \frac{\ln(2+\arctan(x))}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = (2+\arctan(x))\ln(2+\arctan(x)) - \arctan(x) + C \qquad (C\in\mathbb{R}).$$

   Remarque : Avec le changement de variable $y = 2+\arctan(x)$, on obtient directement le résultat après l'intégration par parties.

2. (3,5pts) *Calculer*

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,\mathrm{d}x.$$

Indication : On pourra effectuer un changement de variable.

Posons $y = \sqrt{x}$. Alors $x = y^2$, et $\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$. De plus, $y = 1$ quand $x = 1$, et $y = \sqrt{2}$ quand $x = 2$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,\mathrm{d}x &= 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{y^2}{y^2-4}\,\mathrm{d}y \\ &= 2(\sqrt{2}-1) + 8\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{y^2-4}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{1}{y^2-4} = \frac{1}{(y-2)(y+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right),$$

donc

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{y^2-4}\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{4}\left(\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{y-2}\,\mathrm{d}y - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{y+2}\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{1}{4}\left([\ln|y-2|]_1^{\sqrt{2}} - [\ln|y+2|]_1^{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\ln|\sqrt{2}-2| - \ln|\sqrt{2}+2| + \ln|3|) \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}\right| + \ln(3)\right) \\ &= \frac{1}{4}(\ln(3-2\sqrt{2}) + \ln(3)) \\ &= \frac{1}{4}\ln(3(3-2\sqrt{2}))\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,\mathrm{d}x = 2(\sqrt{2} - 1 + \ln(3(3-2\sqrt{2}))).$$

Exercice 4. (4 points)

Soit $E = C([0,\pi],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles. On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{f \in E : f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}, \qquad G = \mathrm{Vect}(\sin,\cos).$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

Indication : Pour $u \in E$, on pourra chercher une fonction $f \in F$ de la forme $f = u - \lambda\sin - \mu\cos$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1pt) Soit $f \in F \cap G$. On a $f \in G$, donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$f = \lambda\sin + \mu\cos.$$

On a donc

$$\begin{cases} f(0) = \mu \\ f(\pi/2) = \lambda \\ f(\pi) = -\mu \end{cases}$$

On a aussi $f \in F$, donc $\mu = \lambda = -\mu$, donc $\mu = 0$ puis $\lambda = 0$. Donc $f = 0_E$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

Il reste à montrer que $E = F + G$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse (2,5pts) : Soit $u \in E$. Supposons qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $u = f + g$. On a $g \in G$, donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $g = \lambda\sin + \mu\cos$. Donc

$$f = u - \lambda\sin - \mu\cos,$$

et

$$\begin{cases} f(0) = u(0) - \mu \\ f(\pi/2) = u(\pi/2) - \lambda \\ f(\pi) = u(\pi) + \mu. \end{cases}$$

On a $f \in F$, donc $f(0) = f(\pi)$, d'où

$$\mu = \frac{1}{2}(u(0) - u(\pi)),$$

puis $f(0) = f(\pi/2)$, d'où

$$\lambda = u(\pi/2) - u(0) + \mu = \frac{1}{2}(-u(0) + 2u(\pi/2) - u(\pi)).$$

Synthèse (0,5pt) : Soit $u \in E$. Soit $f, g \in E$ les fonctions définies par

$$f = u - \frac{1}{2}(-u(0) + 2u(\pi/2) - u(\pi)) \sin - \frac{1}{2}(u(0) - u(\pi)) \cos$$

et

$$g = \frac{1}{2}(-u(0) + 2u(\pi/2) - u(\pi)) \sin + \frac{1}{2}(u(0) - u(\pi)) \cos$$

On a immédiatement $f + g = u$ et $g \in G$. De plus,

$$f(0) = u(0) - \frac{1}{2}(u(0) - u(\pi)) = \frac{1}{2}(u(0) + u(\pi)),$$

$$f(\pi/2) = u(\pi/2) - \frac{1}{2}(-u(0) + 2u(\pi/2) - u(\pi)) = \frac{1}{2}(u(0) + u(\pi))$$

et

$$f(\pi) = u(\pi) + \frac{1}{2}(u(0) - u(\pi)) = \frac{1}{2}(u(0) + u(\pi)),$$

donc $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)$, et $f \in F$. On a donc $u = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. Donc $E = F + G$. Comme on a aussi $F \cap G = \{0_E\}$, on a finalement $E = F \oplus G$.