
Devoir Surveillé n°3
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans la notation. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement justifiées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises. L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.

Veillez indiquer votre groupe (P1,P2,P3,P4,P5) sur la copie.

Exercice 1. (5 points)

Soit $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (2x - y + z + 3t, x + y - 2z + t, 3x + y - z + 4t).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker u$. L'application u est-elle injective ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } u$. L'application u est-elle surjective ?

Exercice 2. (6 points)

On considère les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^4 :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}, \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \text{ et } z - t = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 . On admettra que G en est un également.
2. Déterminer une base de F et préciser sa dimension.
3. Déterminer une base de G et préciser sa dimension.
4. Déterminer une base de $F \cap G$ et préciser sa dimension.
5. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F + G$. A-t-on $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?

Exercice 3. (7 points)

1. Calculer

$$\int \frac{\ln(2 + \arctan(x))}{x^2 + 1} dx.$$

Indication : On pourra effectuer un changement de variable puis une intégration par parties.

2. Calculer

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx.$$

Indication : On pourra effectuer un changement de variable.

Exercice 4. (4 points)

Soit $E = C([0, \pi], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \pi]$ à valeurs réelles. On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{f \in E : f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}, \quad G = \text{Vect}(\sin, \cos).$$

Montrer que $E = F \oplus G$.

Indication : Pour $u \in E$, on pourra chercher une fonction $f \in F$ de la forme $f = u - \lambda \sin - \mu \cos$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.