Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2025-2026
Cursus préparatoire/CCP, $1^{\text{ère}}$ année 7 mai 2026

Analyse 2 cursus préparatoire, épreuve de “seconde chance”
Durée 1h30

Exercice 1. (Question de cours) *Soit $a < b$ deux réels et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.*

1. *Montrer que f est bornée.*
   Par définition, il existe des réels $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ tels que f coïncide sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ avec une fonction f_i qui est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$. Chaque fonction continue sur un segment y est bornée ; on en déduit que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ il existe $M_i \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq M_i$ pour tout $x \in]a_i, a_{i+1}[$. On a alors
   $$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i + \sum_{i=0}^{n} |f(a_i)|$$
   On conclut que f est bornée sur $[a,b]$.
2. *Montrer que $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est continue sur $[a,b]$.*
   Grâce au résultat que nous venons d'établir, nous savons qu'il existe une constante M telle que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a,b]$. À l'aide de la relation de Chasles et de l'inégalité triangulaire, on en déduit que pour tout $x, y \in [a,b]$ on a
   $$|F(x) - F(y)| = \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_y^x |f(t)|\,dt \right| \leq M|x-y|.$$
   Par conséquent, F est M-lipschitzienne et donc continue.

Exercice 2. *Déterminer, si elle existe, la limite quand x tend vers 0 de* $\dfrac{e^x - \arctan(x) - \cos(x)}{\sin(x) - \ln(1+x)}$.

En 0, on a $\sin(x) - \ln(1+x) = x - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
Il nous reste à calculer un développement limité à l'ordre 2 en 0 du numérateur :
$$e^x - \arctan(x) - \cos(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = x^2 + o(x^2).$$
On obtient finalement, au voisinage de 0 :
$$\frac{e^x - \arctan(x) - \cos(x)}{\sin(x) - \ln(1+x)} = \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 2 + o(1).$$
Par conséquent, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \arctan(x) - \cos(x)}{\sin(x) - \ln(1+x)} = 2.$

Exercice 3.

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(1+X^2)}$.* On sait qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{bX + c}{1 + X^2}$.
   En multipliant par X et en évaluant en 0, on obtient $a = 1$; en multipliant par $1 + X^2$ et en évaluant en $\imath$ on obtient $bi + c = \dfrac{1}{\imath} = -\imath$. Comme b et c sont réels on a donc $b = -1$ et $c = 0$.
   On a établi l'égalité $\dfrac{1}{X(1+X^2)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{X}{1+X^2}$.

2. *Déterminer toutes les solutions sur* $]0,+\infty[$ *de l'équation différentielle suivante :*

$$t(1+t^2)y'(t)+y(t)=\sqrt{1+t^2}.$$

On commence par résoudre l'équation homogène, qu'on réécrit sous la forme

$$y'(t)+\frac{1}{t(1+t^2)}y(t)=0$$

pour se ramener au cadre vu en cours.

Il nous faut tout d'abord déterminer une primitive F de $t\mapsto -\dfrac{1}{t(1+t^2)}=-\dfrac{1}{t}+\dfrac{t}{1+t^2}$ sur $]0,+\infty[$. Par exemple, $F\colon t\mapsto -\ln(t)+\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right)$ convient.

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions de la forme $t\mapsto C\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}$, où C est une constante réelle.

Pour résoudre l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant une solution de la forme $t\mapsto C(t)\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}$, et on arrive à l'équation

$$\forall t>0\quad t(1+t^2)C'(t)\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}=\sqrt{1+t^2},$$

ou encore $C'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$. La fonction $C\colon t\mapsto \arctan(t)$ convient donc.

Finalement, les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle étudiée sont les fonctions de la forme

$$t\mapsto(\arctan(t)+C)\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$$

où C est une constante réelle.

Exercice 4. *On souhaite étudier* $f\colon x\mapsto\dfrac{e^x-e^{-x}}{1+\ln(\cos(x))}$ *au voisinage de* 0.

1. *Justifier que* f *est bien définie au voisinage de* 0.

   Sur $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ on a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq\cos(x)\leq 1$ donc $\ln(\cos(x))$ est bien défini.

   Par ailleurs, $1+\ln(\cos(x))$ tend vers $1+\ln(1)\neq 0$ quand x tend vers 0 ; par continuité de $x\mapsto 1+\ln(\cos(x))$ on en déduit qu'il existe $\delta>0$ tel que $1+\ln(\cos(x))\neq 0$ pour tout $x\in[-\delta,\delta]$.

   La fonction f est donc bien définie sur un intervalle $[-\delta,\delta]$ avec $\delta>0$.

2. *Donner un développement limité de* f *à l'ordre* 3 *en* 0.

   On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{e^x-e^{-x}}{1+\ln(\cos(x))}&=\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})+o(x^3)}{1+\ln(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))}\\&=\frac{2x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}\\&=\left(2x+\frac{x^3}{3}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)\\&=2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

3. *Justifier que le graphe de* f *admet une tangente en* 0 *; donner l'équation de cette tangente et déterminer la position du graphe de* f *par rapport à sa tangente en* 0.

   Comme f est continue en 0 et admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, l'équation de la tangente se lit sur ce développement limité : la tangente au graphe de f en 0 est d'équation $y=2x$.

Étudier la position du graphe de f par rapport à sa tangente en 0 revient à étudier le signe de $f(x)-2x=\dfrac{4}{3}x^3+o(x^3)\sim\dfrac{4}{3}x^3$ au voisinage de 0. On conclut que le graphe traverse sa tangente en 0 (en étant, au voisinage de 0, sous la tangente pour $x<0$ et au-dessus pour $x>0$).

Exercice 5. *Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^n\cos^2(x)\,dx$.*

1. *Calculer I_0 et I_1.*

   Par définition, $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx$. On linéarise : $\cos^2(x)=\dfrac{\cos(2x)+1}{2}$. On obtient donc

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2x)+1}{2}\,dx=\left[\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

   Par ailleurs, on a

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)cos^2(x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}.$$

2. *À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $I_n=\displaystyle\int_0^1 u^n\sqrt{1-u^2}\,du$.*

   On pose $u=\sin(x)$; ce changement de variable est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $du=\cos(x)dx$. De plus, comme $\cos(x)$ est positif sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos(x)=\sqrt{1-\sin^2(x)}=\sqrt{1-u^2}$. On obtient donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$I_n=\int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)}u^n\sqrt{1-u^2}\,du=\int_0^1 u^n\sqrt{1-u^2}\,du.$$

3. *À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+4}I_n$.*

   Soit $n\in\mathbb{N}$. On écrit $u^{n+2}\sqrt{1-u^2}=u^{n+1}\cdot u\sqrt{1-u^2}$; en dérivant $u\mapsto u^{n+1}$ et intégrant $u\mapsto u\sqrt{1-u^2}$ (de primitive $u\mapsto -\dfrac{1}{3}(1-u^2)^{3/2}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$) on obtient par intégration par parties :

$$\begin{aligned}I_{n+2}&=\left[-\frac{u^{n+1}(1-u^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1+\frac{n+1}{3}\int_0^1 u^n(1-u^2)\sqrt{1-u^2}\,du\\&=\frac{n+1}{3}(I_n-I_{n+2}).\end{aligned}$$

   On vient d'obtenir l'égalité $3I_{n+2}=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$, ou encore $(n+4)I_{n+2}=(n+1)I_n$.

4. *Déduire des résultats des questions précédentes que*

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad (n+1)(n+2)(n+3)I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

   Soit $u_n=(n+1)(n+2)(n+3)I_nI_{n+1}$. Montrons que u_n est constante : pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=(n+2)(n+3)(n+4)I_{n+1}I_{n+2}\\&=(n+2)(n+3)(n+4)I_{n+1}\frac{n+1}{n+4}I_n\\&=(n+1)(n+2)(n+3)I_nI_{n+1}\\&=u_n.\end{aligned}$$

   Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n=u_0=6I_0I_1=6\cdot\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{2}$.

5. *Démontrer que $I_n\sim_{+\infty}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n^3}}$.*

   Notons déjà que $I_n>0$ pour tout n (intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction continue, positive, ne s'annulant qu'en 0 et 1).

Puisque pour tout $u \in [0,1]$ on a $0 \leq u^{n+1}\sqrt{1-u^2} \leq u^n\sqrt{1-u^2}$ on obtient, par positivité de l'intégrale, que $I_{n+1} \leq I_n$ pour tout n.
Par ailleurs, $\dfrac{n+1}{n+4} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n}$, et on obtient donc l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n+1}{n+4} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$: on vient d'établir que $I_n \sim_{+\infty} I_{n+1}$.
Mais alors, le résultat de la question précédente nous permet d'obtenir que $n^3 I_n^2 \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{2}$, ce dont on déduit (parce que $\sqrt{1} = 1$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue) que $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n^3}}$