
Analyse 2 cursus préparatoire, épreuve de "seconde chance"
Durée 1h30

L'usage et la possession de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction, le détail des calculs doit apparaître sur la copie et la présentation doit être la plus soignée possible.

Exercice 1. (Questions de cours)

Soit $a < b$ deux réels et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est continue sur $[a, b]$.

Exercice 2. Déterminer, si elle existe, la limite quand x tend vers 0 de $\frac{e^x - \arctan(x) - \cos(x)}{\sin(x) - \ln(1+x)}$.

Exercice 3.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(1+X^2)}$.
2. Déterminer toutes les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$t(1+t^2)y'(t) + y(t) = \sqrt{1+t^2}.$$

Exercice 4. On souhaite étudier $f: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{1 + \ln(\cos(x))}$ au voisinage de 0.

1. Justifier que f est bien définie au voisinage de 0.
2. Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
3. Justifier que le graphe de f admet une tangente en 0; donner l'équation de cette tangente et déterminer la position du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \cos^2(x) dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_n = \int_0^1 u^n \sqrt{1-u^2} du$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} I_n$.
4. Dédire des résultats des questions précédentes que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)(n+2)(n+3)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

5. Démontrer que $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n^3}}$.