Feuille n° 6 : Espaces engendrés, bases, dimension, supplémentaires

Exercice 1 Soit $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -2, 3, -4)$.

1. Donner un système de 2 équations à 4 inconnues dont l'ensemble des solutions soit égal à $\text{Vect}(u, v)$.
2. Peut-on trouver $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ pour que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}(u, v)$? Pour que $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}(u, v)$?

Exercice 2 Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer la nature géométrique et une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x + y + z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2y - z = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x + y + z = 0 \text{ et } 2y - z = 0\}$.
4. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$.
5. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$.
6. $F_3 = F_1 \cap F_2$.

Exercice 3 Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 0)$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (a_1, a_2) et G celui engendré par (a_3, a_4).
Montrer que $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 4
On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : x + 4y - 5z - 2t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : 3x - y + t = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$; on admettra sans le démontrer que F est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. Déterminer une base de E, puis une base de F.
3. Déterminer une base de $E + F$, puis une base de $E \cap F$.
4. Soit (f_1, f_2, f_3) la base de F déterminée au 2). Expliciter un vecteur f_4 tel que (f_1, f_2, f_3, f_4) soit une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 5 (∗) Soit $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -2, 3, -4)$.

1. Donner un système de 2 équations à 4 inconnues dont l'ensemble des solutions soit égal à $\text{Vect}(u, v)$.
2. Peut-on trouver $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ pour que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}(u, v)$? Pour que $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}(u, v)$?

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel, et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$F \cap G = F \cap H, \quad F + G = F + H, \quad G \subset H.$$

Montrer que $G = H$.

Exercice 7
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbf{R}^6$, tous les deux de dimension 4. Quelle peut-être la dimension de $F + G$? de $F \cap G$?

Exercice 8 (∗) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension 3, vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$.
Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 9 Soit E l'espace vectoriel des suites de réels.

1. Soit $F \subset E$ l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence
$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$
Déterminer une base de F. Quelle est la suite de F telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$?
2. Mêmes questions avec $G \subset E$ l'ensemble des suites (v_n) qui vérifient la relation de récurrence
$$\forall n \geq 0, \quad v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n, \quad \text{avec} \quad v_0 = v_1 = 1.$$

Exercice 10 Soit E l'ensemble des suites convergentes de nombres réels. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites qui convergent vers 0 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 11 (∗) Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ et $P \in E$.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes qui sont des multiples de P et dont le degré est inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de E. Quelle en est la dimension en fonction du degré de P ?
2. Soit $Q \in E$ un polynôme sans racine commune (réelle ou complexe) avec P, et tel que $\deg(P) + \deg(Q) = n + 1$. Montrer que $E = F_P \oplus F_Q$.
3. En déduire qu'il existe deux polynômes U, V tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 12 (∗) Soient $n \geqslant 1$ et $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. On définit
$$E_a = \{P \in E : (X - a) \text{ divise } P\}$$
pour $a \in \mathbf{R}$. Montrer que si $a \neq b$ il existe un couple de réels (c, d) tels que $1 = c(X-a) + d(X-b)$. En déduire que $E = E_a + E_b$. La somme est-elle directe ?

Exercice 13 Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des applications dérivables de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Soit F le sous-ensemble de E formé par les applications f telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H l'ensemble des applications $x \mapsto ax + b$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 14 Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et soient P et I les sous-ensembles de E formés respectivement des fonctions paires et impaires. Montrer que P et I sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 15
Soient les sous-espaces des matrices *symétriques* $S = \{M \in M_3(\mathbf{R}) | M^\intercal = M\}$ et *antisymétriques* $A = \{M \in M_3(\mathbf{R}) | M^\intercal = -M\}$ de $M_3(\mathbf{R})$.

1. Déterminer les dimensions de S et de A.
2. Montrer que $M_3(\mathbf{R}) = S \oplus A$.

Exercice 16

1. Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$.
2. Soit $F = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que $M_2(\mathbf{R}) = E \oplus F$.

Le saviez-vous ? L'allemand Hermann Grassmann (1809-1877) n'a jamais eu de poste universitaire au cours de sa vie. La formule qui porte son nom se trouve dans un ouvrage de 1844 où il n'y a pas encore de notion claire d'espace vectoriel. Elle est exprimée ainsi :

> Pris ensemble, les nombres de niveau de deux grandeurs sont aussi grandes que le nombre de niveau de leur système commun et celui du système qui les contient immédiatement, pris ensemble.

Plusieurs décennies se sont écoulées avant que les idées de Grassmann ne furent retravaillées par d'autres mathématiciens.