

Feuille n° 5 : Intégrales

Exercice 1 Soit $a < b$ deux réels et $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante.

- Soit $n \geq 1$ et $x_0, x_1, \dots, x_n$ la subdivision de $[a, b]$ en n parties égales.
 - En s'aidant d'un dessin, définir le plus naturellement possible deux fonctions en escalier φ et Φ sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq f$ et $f \leq \Phi$.
 - Calculer $I(\Phi) - I(\varphi)$.
- Montrer que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Exercice 2 Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

- Montrer que si f est à valeurs positives, et telle que $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.
- Montrer que f est de signe constant sur $[a, b]$ si, et seulement si,

$$\int_a^b |f(t)| dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right|.$$

Exercice 3 Intégrales, parité et périodicité.

- Soit $a > 0$. Soit $f: [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.
 - Montrer que si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
 - Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- Soit $T > 0$. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}$ et T -périodique.
 - Montrer que pour tous réels a et b , $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx$.
 - Montrer que pour tout réel a , $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

Exercice 4 Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

- | | | |
|--------------------------------------|---|--|
| (a) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ | (e) $\int \frac{dx}{x^3-1}$ | (i) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ |
| (b) $\int \frac{x}{x^2-3x+2} dx$ | (f) $\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx$ | (j) (*) $\int \frac{5x}{x^4+1} dx$ |
| (c) $\int \frac{dx}{x^2+4}$ | (g) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ | (k) (*) $\int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5} dx$ |
| (d) (*) $\int \frac{x}{x^2-4x+9} dx$ | (h) (*) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} dx$ | |

Exercice 5 (*) En utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, calculer :

$$I = \int_0^\pi x \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| (a) $\int_0^1 x e^{1+x^2} dx$ | (c) $\int_0^1 (x^3+1)e^{-x} dx$ | (e) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}$ |
| (b) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ | (d) $\int_0^{1/2} (\text{Arcsin } x)^2 dx$ | (f) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\cos x}$ |

Exercice 7 (*) Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\int_0^1 \ln(x^2+3) dx$ | (d) $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$
(poser $t = \sqrt{2}/x$) | (g) $\int_{-1}^1 \frac{dt}{(\text{sh } t + \text{ch } t)^n}$ |
| (b) $\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$
(poser $x = \cos \theta$) | (e) $\int_2^3 x^2 \ln(x^6-1) dx$
(poser $t = x^3$) | (h) $\int_0^{1/2} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| (c) $\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$
(poser $t = \sqrt{x+1}$) | (f) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ | (i) $\int_0^{\pi/4} \frac{\varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi$ |
| | | (j) $\int_0^2 \sqrt{\frac{t+7}{t+6}} dt$ |

Exercice 8 On note $D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{1+x^2} \leq y \leq e^{x/2} \right\}$.

- Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+x^2} \leq e^{x/2}$.
- Dessiner D .
- Calculer l'aire de D .

Exercice 9 Démontrer, à l'aide de majorations, les limites suivantes.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} (\sin x)^n dx = 0.$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx = 0.$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = 1.$

Exercice 10 (*)

1. Montrer que $\frac{1}{R^4} \int_{-R}^R \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$.
2. (a) Soient $t \in \mathbf{R}$ et $R > 0$. Montrer que $|1 + R^2 e^{it}|^2 \geq (R^2 - 1)^2$.
(b) Montrer que $R \int_0^\pi \frac{e^{it}}{1 + R^2 e^{it}} dt \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$.

Exercice 11 Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 t^{n-1} f(t) dt$.

1. Montrer que $I_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Effectuer une intégration par parties sur I_n puis montrer que $nI_n \rightarrow f(1)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Montrer que $\int_0^1 f(t) \sin(nt) dt \rightarrow 0$.

Exercice 12 Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit $w_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

1. (a) Montrer que $w_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
(b) Montrer que la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
(c) Montrer que $nw_n = (n-1)w_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.
2. Dédire des résultats précédents que $w_n \sim w_{n-1}$ quand $n \rightarrow +\infty$.
3. Justifier que la suite $(nw_n w_{n-1})_{n \geq 1}$ est constante, puis en déduire que

$$w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 13 On définit une application $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \quad \text{pour } t \in]0, 1[, \quad f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

On définit également une application $F:]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1. Montrer que f est continue sur $]0, 1[$.
2. Pour $x \in]0, 1[$, quel est le signe de $F(x)$?
3. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0, 1[$ et calculer sa dérivée.
4. (a) Pour $x \in]0, 1[$, montrer que $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$.
(b) Pour $x \in]0, 1[$, montrer les inégalités : $x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$.
(c) En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$.
(d) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$.

5. (Bonus)

- (a) Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$.
- (b) Dédire de ce qui précède la valeur de $\int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 14 Calculer les limites des suites suivantes :

1. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2};$
2. $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2};$
3. $c_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{1/n};$
4. $d_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right);$

Indication pour (d_n) : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 15 (*) Soit f une application continue sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives. Montrer que

$$\int_0^1 \ln(f(t)) dt \leq \ln \left(\int_0^1 f(t) dt \right).$$

Le saviez-vous ? Le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) a été amené à préciser ce qu'est une fonction intégrable dans le cadre de travaux sur la convergence des séries de Fourier, un sujet abordé par beaucoup de ses prédécesseurs.