Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025

Examen d'analyse complexe du mercredi 7 mai 2025 - Durée: 2h, hors aménagements

Tous objets électroniques (smartphone, montre connectée, calculatrice, etc.) et documents interdits

---

Exercice 1 (**4 points**).

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction
$$z \mapsto f(z) = \int_I \varphi(z,t)dt$$
   (a) Soit $\triangle$ un triangle plein inclus dans Ω. Montrer que
$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \int_I \left(\int_{\partial\triangle} \varphi(z,t)dz \right) dt$$
   (b) On suppose de plus que pour chaque $t \in I$ fixé, $z \mapsto \varphi(z,t)$ est holomorphe. Montrer que f est holomorphe.
2. Soit f une fonction holomorphe dans le disque épointé $\dot{D}(a,r)$. On suppose que l'image de tout disque épointé $\dot{D}(a,\rho)$, $\rho \in]0,r[$, par f est dense dans $\mathbb{C}$. Que peut-on dire de la série de Laurent de f au point a ? (On ne demande pas de justifier la réponse).
3. Existe-t-il un biholomorphisme h du demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ sur le disque unité ouvert $D(0,1)$? Si oui, donner l'expression d'un tel biholomorphisme (sans preuve).

Exercice 2 (**4 points**).

1. Existe-t-il un voisinage connexe V de 0 et une fonction holomorphe f définie sur V tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad f(1/n) = \frac{1}{2n+1} \, ?$$
2. Si une telle fonction existe, est-elle unique ? Autrement dit, si f_1 et f_2 sont deux telles fonctions définies sur un voisinage connexe V de 0, sont-elles égales ?
3. Reprendre la question 1 avec la condition : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ f(1/n) = e^{-n}$.

Exercice 3 (**8 points**).

1. Soit $R > 0$ et Γ_R un rectangle de sommets $-R, R, R+2i$ et $-R+2i$. Représenter Γ_R. En donner une paramétrisation γ_R.
2. Déterminer les zéros de la fonction $z \mapsto h(z) = \cosh(z)$ et leurs ordres.
3. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Montrer que $a = \frac{i}{2}$ et $b = \frac{3i}{2}$ sont des pôles de la fonction
$$f(z) = \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{\cosh(\pi z)}$$
   et calculer les résidus de f en ces points.
4. En déduire la valeur de $\int_{\gamma_R} f(z)dz$.
5. Montrer que
$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^2 f(R+iy)dy = 0$$
   puis que
$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^2 f(-R+iy)dy = 0.$$

6. Vérifier que cosh est $2i\pi$ pérodique. En déduire que
$$\int_{[R+2i,-R+2i]} f(z)dz = -e^{4\pi\xi} \int_{[-R,R]} f(z)dz$$
7. Pour $g \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de g la fonction $\hat{g}$ définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par
$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2i\pi x\xi}dx$$
Vérifier que la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto g(x) = \frac{1}{\cosh(\pi x)}$ est bien définie et montrer que
$$\hat{g} = g$$
Est-ce l'unique fonction ayant cette propriété ?

Exercice 4 (4 points). Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) < 1\}$, $x = \Re(z)$, F est une fonction holomorphe dans Ω, continue et bornée sur $\overline{\Omega}$, $M_0 = \sup_{\Re(z)=0} |F(z)|$ et $M_1 = \sup_{\Re(z)=1} |F(z)|$. On veut montrer que
$$|F(z)| \leq M_0^{1-x} M_1^x \qquad \text{pour tout } z \in \Omega. \tag{1}$$
1. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Pour $z \in \overline{\Omega}$, on pose
$$G(z) = \frac{F(z)(M_0+\varepsilon)^{z-1}(M_1+\varepsilon)^{-z}}{1+\varepsilon z}.$$
Montrer que G est holomorphe dans Ω, continue sur $\overline{\Omega}$ et que $\lim_{|z|\to+\infty} G(z) = 0$.
2. Montrer que
$$|G(z)| \leq 1 \qquad \text{pour tout } z \in \partial\Omega.$$
3. En déduire l'inégalité (1).

Exercice 5 (hors barème, pour celles et ceux qui veulent tenter d'avoir des points bonus). Rappelons que si une fonction f appartient simultanément à deux espaces de Lebesgue $L^{p_1}(\mathbb{R})$ et $L^{p_2}(\mathbb{R})$, alors f appartient aussi à tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [p_1, p_2]$ et on a l'inégalité $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|^{1-t}_{L^{p_1}(\mathbb{R})} \|f\|^t_{L^{p_2}(\mathbb{R})}$, où $t \in [0,1]$ est l'unique nombre réel tel que
$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}$$
Si maintenant T est un opérateur linéaire continu de $L^{p_1}(\mathbb{R})$ dans $L^{q_1}(\mathbb{R})$, mais aussi de $L^{p_2}(\mathbb{R})$ dans $L^{q_2}(\mathbb{R})$, le théorème d'interpolation complexe de Riesz-Thorin affirme que T est un opérateur linéaire continu de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})$ pour tout couple d'exposants (p,q) interpolant entre (p_1,q_1) et (p_2,q_2). Dans cet exercice, on se propose de démontrer ce résultat dans le cas particulier où $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p \in [1,2]$ et T est la transformée de Fourier, définie à l'exercice 3.
1. Soit $p \in [1,2]$. Soit $z \mapsto P(z)$ la fonction définie sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) < 1\}$ par
$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1-z}{1} + \frac{z}{2}$$
Soient aussi $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ telles que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$. Pour $z \in \Omega$, on pose enfin
$$F(z) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} |f(x)|^{\frac{p}{P(z)}-1} f(x)\, |g(\xi)|^{\frac{p}{P(z)}-1} g(\xi)\, dxd\xi,$$
avec la convention d'écriture $|f(x)|^{\frac{p}{P(z)}-1} f(x) = 0$ si $f(x) = 0$ et de même pour $g(\xi)$. En appliquant le résultat de l'exercice 4, montrer que pour tout $z \in \Omega$,
$$|F(z)| \leq 1$$
2. En déduire que la transformée de Fourier se prolonge en une application continue de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^{p'}(\mathbb{R})$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Indication : on rappelle que pour $h \in L^{p'}(\mathbb{R})$, $\|h\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} = \sup_{g\in C_c(\mathbb{R}), \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}=1} \int_{\mathbb{R}} h(\xi)g(\xi)d\xi$