Fiche de TD 1
Espaces vectoriels et sous-espaces

Exercice 1 Montrer que l'ensemble des fonctions réelles de la forme

$$x \mapsto A\cos(x+\phi)\,,$$

où $A \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $\phi \in [0, 2\pi[$ sont des constantes, est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles. Quelle est sa dimension ?

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie.

a) Soient $F, G \leqslant E$. Montrer que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

b) Donner un exemple de trois sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, F_3 \leqslant \mathbb{R}^2$ tels que $\dim(F_1+F_2+F_3) \neq \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 - \dim F_1 \cap F_2 - \dim F_2 \cap F_3 - \dim F_1 \cap F_3 + \dim F_1 \cap F_2 \cap F_3$.

Exercice 3 a) Soit E est le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ (*respectivement* $\mathscr{I}$) l'ensemble des fonctions réelles continues paires (*respectivement* impaires). Montrer que $\mathscr{P}$, $\mathscr{I} \leqslant E$ et que $\mathscr{P} + \mathscr{I} = E$.

b) Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathscr{S}$ (*respectivement* $\mathscr{A}$) l'ensemble des matrices réelles symétriques (*respectivement* antisymétriques) de taille n. Montrer que $\mathscr{S}$, $\mathscr{A} \leqslant E$ et que $\mathscr{S} + \mathscr{A} = E$.

c) Soit E l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel des suites réelles et que $E = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ où u, v sont les suites définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $v_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

d) Soit E l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $y'' + y = 0$. Vérifier que c'est bien un espace vectoriel (comme sous-espace des fonctions réelles).

Montrer que $E = \mathbb{R}\cos + \mathbb{R}\sin$. *Indication. Soit y une fonction réelle dérivable. Vérifier qu'il existe a, b des fonctions réelles telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y = a(x)\cos x + b(x)\sin x$, $y'(x) = -a(x)sinx + b(x)\cos x$ et que ces fonctions sont constantes si $y \in E$.*

Exercice 4 Soit E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des suites réelles.

Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

a) Les suites croissantes ;

b) les suites constantes ;

c) les suites constantes à partir d'un certain rang ;

d) les suites qui ont une limite ;

e) les suites (u_n) telles que $\lim u_n = 0$;

f) les suites (u_n) telles que $\lim u_n = +\infty$;

g) les suites qui n'ont pas de limite ;

h) les suites bornées ;

i) les suites non bornées.

j) $o(n)$;

k) $O(n)$;

l) les suites (u_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Exercice 5 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces de E ?

a) Les matrices diagonales ;

b) les matrices triangulaires supérieures ;

c) les matrices de diagonale nulle ;

d) les matrices diagonalisables ;

e) les matrices trigonalisables ;

f) les matrices nilpotentes ;

g) les matrices inversibles ;

h) les matrices non inversibles ;

i) les matrices de rang $\leqslant 1$.

Exercice 6 a) Soit $n \geqslant 1$. Soient $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Montrer que l'application linéaire $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $P(X) \mapsto (P(x_0), ...P(x_n))$ est un isomorphisme linéaire.

b) En déduire que la famille des suites $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in \mathbb{R}$, est $\mathbb{R}-$linéairement indépendante.

Exercice 7 Soit E un $K-$espace vectoriel. Si $v_1, ...v_N \in E$, on pose :

$$\text{Vect}\{v_1, ..., v_N\} = Kv_1 + ... + Kv_N = \{t_1v_1 + ... + t_Nv_N \ : \ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant N,\, t_i \in K\} \ .$$

a) Montrer que $\text{Vect}\{v_1, ...v_N\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que $\text{Vect}\{(1,-1,0),(0,1,-1)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z=0\}$.

c) Trouver des équations linéaires $l_1, ..., l_k$ sur $\mathbb{R}^3$ telles que $\text{Vect}\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} = \{(x,y,z) \ : \ l_1(x,y,z) = ... = l_k(x,y,z) = 0\}$.

Exercice 8 Soit E un $K-$espace vectoriel. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Si $F \leqslant E$, on note $F^\perp = \{l \in E^* \ : \ \forall\, x \in F,\, l(x) = 0\}$. Si $V \leqslant E^*$, on note $V^\circ = \{x \in E \ : \ \forall\, l \in V,\, l(x) = 0\}$.

a) Montrer que $E^\perp = 0$, $0^\perp = E^*$.

b) Montrer que si $F \leqslant E$, alors $F^\perp \leqslant E^*$ et si $V \leqslant E^*$, alors $V^0 \leqslant E$.

c) Montrer que si $F \leqslant E$, alors $F \leqslant (F^\perp)^\circ$. Montrer de même que si $V \leqslant E^*$, alors $V \leqslant (V^\circ)^\perp$. Montrer que cette inclusion peut être stricte.

d) Montrer que si $F \leqslant E$, alors $F^\perp = ((F^\perp)^\circ)^\perp$. De même montrer que si $V \leqslant E$, alors $V^\circ = ((V^\circ)^\perp)^\circ$.

e) Montrer que si $F_1, F_2 \in E$, alors $F_1 \leqslant F_2 \Rightarrow F_2^\perp \leqslant F_1^\perp$.

f) Soient $F_1, F_2 \leqslant E$. Montrer que $F_1^\perp \cap F_2^\perp = (F_1 + F_2)^\perp$. Démontrer une formule semblabe avec « $^\circ$ ».

g) Soient $F_1, F_2 \leqslant E$, montrer que $F_1^\perp + F_2^\perp \leqslant (F_1 \cap F_2)^\perp$ et une inclusion similaire avec les « $\circ$ ». Montrer que pour les $\circ$, l'inclusion peut être stricte.

Exercice 9 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes réels.

Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

a) Les polynômes de degré $\leqslant n$;

b) les polynômes de degré $\geqslant n$;

c) les polynômes avec au moins n racines ;

d) les polynômes avec au plus n racines ;

e) Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Les polynômes dont l'ensemble des racines est contenu dans $\{x_1, ..., x_n\}$.

f) Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Les polynômes dont l'ensemble des racines contient $\{x_1, ..., x_n\}$.

g) Les polynômes P tels que $P'(1) = 0$;

h) les polynômes dont 1 est une racine au moins double ;

i) les polynômes dont 1 est une racine au plus double.

Exercice 10 Soit T un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des faces de T et $\mathscr{A}$ l'ensemble de ses arêtes. Montrer que l'application linéaire

$$\mathbb{R}^{\mathscr{A}} \to \mathbb{R}^{\mathscr{F}},\ f \mapsto \varphi(f) : F \mapsto \sum_{a \subseteq F} f(a)$$

est surjective et donner une base de son noyau.

Exercice 11 Polynômes symétriques.

a) Déterminer $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]_d$, dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré d.

b) Déterminer $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]_d^{\mathfrak{S}_3}$, dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré d symétriques [†] si $d = 2, 3, 6$.

c) On pose $\sigma_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $\sigma_2 = X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3$, $\sigma_3 = X_1X_2X_3$. Montrer

$$\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]_2^{\mathfrak{S}_3} = \mathbb{C}\sigma_1^2 + \mathbb{C}\sigma_2$$

$$\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]_3^{\mathfrak{S}_3} = \mathbb{C}\sigma_1^3 + \mathbb{C}\sigma_1\sigma_2 + \mathbb{C}\sigma_3$$

$$\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]_6^{\mathfrak{S}_3} = \mathbb{C}\sigma_1^6 + \mathbb{C}\sigma_1^4\sigma_2 + \mathbb{C}\sigma_1^3\sigma_3 + \mathbb{C}\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mathbb{C}\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \mathbb{C}\sigma_2^3 + \mathbb{C}\sigma_3^2 \ .$$

d) Soient $L_1 = X_1 + jX_2 + j^2X_3$, $L_2 = X_1 + j^2X_2 + jX_3$. Trouver $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $L_1L_2 = a\sigma_1^2 + b\sigma_2$.

e) Trouver $c, d, e \in \mathbb{C}$ tels que $L_1^3 + L_2^3 = c\sigma_1^3 + d\sigma_1\sigma_2 + e\sigma_3$.

f) Trouver $f, g, h, i, j \in \mathbb{C}$ tels que $(X_1 - X_2)^2(X_2 - X_3)^2(X_1 - X_3)^2 = f\sigma_1^3\sigma_3 + g\sigma_1^2\sigma_2^2 + h\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + i\sigma_2^3 + j\sigma_3^2$.

†. *c-à-d* $\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_3$, $P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}) = P(X_1, X_2, X_3)$.