Licence de mathématiques
L2, Algèbre 4
examen final corrigé
lundi 5 mai 2025
durée 2H

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

4

Exercice 1 Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ trois $\mathbb{R}$-espaces affines.

2 a) Donner la définition d'une transformation affine $T : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$.

Soient E_1, E_2 les espaces vectoriels associés à $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. On dit que T est une transformation affine s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{T} : E_1 \to E_2$ telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{E}_1,\ T(N) = T(M) + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{MN}).$$

2 b) Montrer que si $T : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ et $S : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3$ sont des transformations affines, alors l'application $S \circ T : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_3$ est aussi une transformation affine.

Soient E_1, E_2, E_3 les espaces vectoriels associés à $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$. Soient $\overrightarrow{S} : E_2 \to E_3$, $\overrightarrow{T} : E_1 \to E_2$ les applications linéaires associés à S, T. Alors :

$$\forall M, N \in \mathcal{E}_1,\ S \circ T(N) = S(T(N)) = S(T(M) + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{MN}))$$

$$= S(T(M)) + \overrightarrow{S}(\overrightarrow{T}(\overrightarrow{MN}))$$

$$= S \circ T(M) + \overrightarrow{S} \circ \overrightarrow{T}(\overrightarrow{MN})$$

or, $\overrightarrow{S} \circ \overrightarrow{T} : E_1 \to E_3$ est linéaire comme composée d'app lications linéaires. Donc $S \circ T : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_3$ est affine avec comme application linéaire : $\overrightarrow{S \circ T} = \overrightarrow{S} \circ \overrightarrow{T}$.

6,5

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$ l'espace des polynômes réels de degré $\leqslant 3$. Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on note

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

1,5 a) Montrer que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est euclidien.

Le $\mathbb{R}-$espace vectoriel E est de dimension finie 4. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ est clairement bilinéiare symétrique. De plus, si $P \in E$, alors

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P^2 \geqslant 0$$

car $^{\forall} -1 \leqslant x \leqslant 1$, $P^2(x) \geqslant 0$. Comme $x \mapsto P^2(x)$ est continue sur $[-1, 1]$, $\int_{-1}^{1} P^2 = 0 \Rightarrow P^2 = 0$ sur $[-1, 1] \Rightarrow P = 0$. D'où :

$$^{\forall} 0 \neq P \in E, \langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P^2 > 0$$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $E \times E$. Donc $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

25

b) Montrer que l'endomorphisme $T : E \to E$ qui, à tout $P \in E$, associe

$$T(P) = ((1 - X^2)P')'$$

est autoadjoint. On pourra raisonner à l'aide d'intégrations par partie.

Remarque. Pour tout $P \in E$, $\deg T(P) = \deg((1 - X^2)P')' \leqslant \deg(1 - X^2)P' - 1 = 2 + \deg P' - 1 = 1 + \deg P' \leqslant \deg P$. Donc $T(P) \in E$.

L'application T est linéaire. Soient $P, Q \in E$. On a :

$$\langle T(P), Q \rangle = \int_{-1}^{1} ((1 - X^2)P')'Q$$

On intègre par parties en posant $u' = ((1 - x^2)P'(x))'$, $v(x) = Q(x)$ et $u = (1 - x^2)P'(x)$, $v'(x) = Q'(x)$. Donc

$$\langle T(P), Q \rangle = [(1 - x^2)P'(x)Q(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (1 - x^2)P'(x)Q'(x)dx$$

$$- \int_{-1}^{1} (1 - x^2)P'(x)Q'(x)$$

(car $1 - x^2$ s'annule en $-1, 1$). Donc

$$\langle T(P), Q \rangle = - \int_{-1}^{1} (1 - x^2)P'(x)Q'(x)dx = - \int_{-1}^{1} (1 - x^2)Q'(x)P'(x)dx$$

$$= \langle T(Q), P \rangle = \langle P, T(Q) \rangle.$$

C'est vrai pour tous $P, Q \in E$ Donc $T^* = T$.

1,5

c) Soient $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 3X^2 - 1$ et $P_3 = 5X^3 - 3X$. Déterminer la matrice de T dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3).

$$T(P_0) = T(1) = 0,$$

$$T(P_1) = T(X) = (1 - X^2)' = -2X = -2P_1,$$

$$T(P_2) = T(3X^2 - 1) = ((1 - X^2)(6X))' = 6 - 18X^2 = -6P_2,$$

$$T(P_3) = T(5X^3 - 3X) = ((1 - X^2)(15X^2 - 3))' = 30X - 60X^3 + 6X = 36X - 60X^3 = -12P_3.$$

Donc T a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -2 & & \\ & & -6 & \\ & & & -12 \end{pmatrix}$ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3).

2

d) En déduire que la base (P_0, P_1, P_2, P_3) est orthogonale et donner une base orthonormale de E.

Les vecteurs P_0, P_1, P_2, P_3 sont donc des vecteurs propres de T associés aux valeurs propres (distinctes) $0, -2, -6, -12$. Comme T est adjoint, ses espaces propressont deux à deux orthogonaux. Donc P_0, P_1, P_2, P_3 sont deux à deux orthogonaux. Donc

$$\left(\frac{P_i}{\sqrt{\langle P_i, P_i\rangle}}\right)_{0 \leqslant i \leqslant 3}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dx}}, \frac{X}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx}}, \frac{3X^2 - 1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (3x^2 - 1)^2 dx}}, \frac{5X^3 - 3X}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (5x^3 - 3x)^2 dx}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, X, \frac{3X^2 - 1}{2\sqrt{\frac{2}{5}}}, \frac{5X^3 - 3X}{2\sqrt{\frac{2}{7}}}\right)$$

est une base orthonormale de E.

6,5

Exercice 3 Si $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1,5

a) Montrer que $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

L'application $A, B \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est bilinéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, si $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \mathrm{Tr}(A{}^tB) = (B, A)$ donc c'est symétrique.

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$(A, A) = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{2} A_{ij}^2 \geqslant 0$$

donc $(A, A) = 0 \Rightarrow A = 0$ car les coefficients A_{ij}, $i, j = 1, 2$, sont réels.
Donc $(\cdot, \cdot)$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On notera $||M|| = \sqrt{(M, M)}$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 b) On notera $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques carrées de taille 2. On rappelle que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 3. Déterminer une base orthonormale de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On applique la méthode de Gram-Schmidt à la base

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient

$$e_1' = e_1,$$

$$e_2' = e_2 - \frac{(e_2, e_1')}{(e_1', e_1')} e_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}{\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3' = e_3 - \frac{(e_3, e_2')}{(e_2', e_2')} e_2' - \frac{(e_3, e_1')}{(e_1', e_1')} e_1'$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}{\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}{\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis on pose

$$\forall i = 1, 2, 3, \; e_i'' = \frac{e_i'}{\sqrt{(e_i', e_i')}}$$

c-à-d

$$e_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; e_3'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La famille (e_1'', e_2'', e_3'') est une base orthonormale de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

1,5 c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Posons $T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$. On a $T \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}), \; (A - T, S) = \mathrm{Tr}\left({}^t \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

$$= 0.$$

Donc $A - T \perp \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et T est bien le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

1,5 d) Calculer $\inf_{S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})} ||A - S||$. *Justifier sa réponse.*

D'après le théorème de Pythagore, si $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, alors

$$||A - S||^2 = ||(A - T) + (T - S)||^2 = ||A - T||^2 + ||T - S||^2$$

car $A - T \perp T - S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Donc

$$\inf_{S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})} ||A - S|| = ||A - T||$$

$$= \sqrt{\mathrm{Tr}^t \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{\mathrm{Tr} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5 1

Exercice 4 a) **Question de cours.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Si r est la rotation d'angle θ, quelle est la matrice de r dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?

On a $r = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2 b) Soit $R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que R est une matrice de rotation.

Les colonnes de R sont deux à deux orthogonales et de norme 1 car $\frac{1}{3^2}(2^2 + 2^2 + (-1)^2) = 1$. Donc $R \in O_3(\mathbb{R})$. De plus,

$$\det R = \frac{1}{3^3}(2^3 + (-1)^3 + 2^3 - (-1)2^2 - (-1)2^2 - (-1)2^2)$$

$$= 1$$

Donc $R \in SO_3(\mathbb{R})$ est une matrice de rotation.

2 c) Déterminer l'axe de rotation et une mesure de l'angle de rotation de R. Comme R n'est pas symétrique, l'axe de R est la droite

$$\ker R - {}^tR = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On complète en une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ en posant :

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = v_1 \wedge v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On a $Rv_1 = v_1$,

$$Rv_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_3,$$

$$Rv_3 = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3.$$

Donc si

$$P = (v_1 | v_2 | v_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}),$$

on a :

$$R = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec $\theta = \frac{\pi}{3}$.

La rotation R a pour axe $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$.