

# Chapitre 1

## Géométrie affine

On travaille sur un corps  $\mathbf{K}$ . Dans la plupart des cas, ce sera  $\mathbf{R}$  mais on pourra parfois considérer d'autres corps comme  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{Q}$  ou les corps finis. Tous les espaces vectoriels considérés seront sur le corps  $\mathbf{K}$  et de dimension finie.

### 1.1 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Avant de définir les espaces affines abstraits, revenons sur le cas plus concret des sous-espaces affines d'un espace vectoriel. Soit  $E$  un espace vectoriel. Pour tout  $x$  dans  $E$ , la translation de vecteur  $x$  est l'application  $\tau_x : E \rightarrow E$  définie par  $y \mapsto x + y$ . L'application  $\tau_x$  est bijective et  $\tau_x^{-1} = \tau_{-x}$ . Elle est linéaire uniquement dans le cas  $x = 0$ . On a de plus  $\tau_x \circ \tau_y = \tau_{x+y}$  : l'ensemble des translations forme un groupe isomorphe à  $(E, +)$ .

On dit qu'une partie  $\mathcal{F} \subset E$  est un *sous-espace affine* (s.e.a.) s'il existe  $x \in E$  et un sous-espace vectoriel  $F \subset E$  tels que

$$\mathcal{F} = \tau_x(F) = x + F = \{x + y : y \in F\}.$$

Dans ce cas, on a nécessairement  $x \in \mathcal{F}$  puisque  $0 \in F$ . Si  $x_1$  et  $x_2$  sont dans  $\mathcal{F}$ , alors  $x_1 - x_2 \in F$  : on retrouve  $F$  comme l'ensemble des différences entre éléments de  $\mathcal{F}$ . En particulier, le sous-espace vectoriel  $F$  est unique. On dit que  $\mathcal{F}$  est le sous-espace affine de direction  $F$  passant par  $x$ . Bien sûr,  $x$  n'est pas uniquement déterminé par cette condition : pour tout  $x'$  dans  $\mathcal{F}$ , on a  $\mathcal{F} = x' + F$ .

Un sous-espace vectoriel  $E \subset V$  est stable par combinaisons linéaires : pour des familles finies  $(x_i)_{i \in I}$  dans  $E$  et  $(\lambda_i)_{i \in I}$  dans  $\mathbf{K}$  on a

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in E$$

(cela se démontre par récurrence sur  $|I|$  ; pour  $|I| = 2$  c'est la définition de sous-espace vectoriel). Les combinaisons linéaires permettent d'expliciter la notion d'espace vectoriel engendré : si  $(E_i)$  est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de  $V$ , leur intersection  $\bigcap E_i$  est aussi un sous-espace vectoriel. On peut donc définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie  $A \subset V$ , noté  $\text{Vect}(A)$ , comme l'intersection de la famille de tous les sous-espaces vectoriels contenant  $A$ . On peut aussi l'écrire comme

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i : I \text{ fini}, \lambda_i \in \mathbf{K}, x_i \in A \right\}$$

puisque le membre de droite forme un sous-espace vectoriel qui est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant  $A$ .

De la même manière, on peut définir le sous-espace affine engendré par une partie  $A \subset V$ . On pourrait rester dans le cadre "concret" des sous-espaces affines d'un espace vectoriel, mais pour des applications ultérieures il est utile de disposer d'une notion abstraite d'espace affine.

## 1.2 Espaces affines abstraits

Dans l'exemple d'un sous-espace affine  $\mathcal{F} = x + F \subset E$  du paragraphe précédent, les points (les éléments du sous-espace affine  $\mathcal{F}$ ) et les vecteurs (les éléments du sous-espace vectoriel  $F$ ) sont tous deux inclus dans  $E$ . Dans la définition d'un espace affine abstrait, ce n'est pas le cas ; il n'est pas possible de définir  $2M$  où  $M + N$  pour des points  $M, N$  de  $\mathcal{F}$ .

[faire un dessin]

Rappelons le vocabulaire des actions de groupes. Une action d'un groupe  $G$  (d'élément neutre  $e$ ) sur un ensemble  $X$  est la donnée d'une fonction  $\mu : G \times X \rightarrow X$  qui vérifie les axiomes  $\mu(e, x) = x$  et  $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$  pour tous  $g, h$  dans  $G$  et  $x \in X$ . Il est habituel d'écrire  $g \cdot x$  plutôt que  $\mu(g, x)$ , voire  $x + g$  lorsque le groupe  $G$  est abélien.

On dit qu'une action est *simplement transitive* si pour tous  $x, y$  dans  $X$ , il existe un unique  $g \in G$  tel que  $g \cdot x = y$ . Autrement dit, pour tout  $x$  dans  $X$ , l'application  $g \mapsto g \cdot x$  est une bijection de  $G$  sur  $X$ .

**Définition.** On appelle *espace affine* la donnée d'un ensemble  $\mathcal{E}$  non vide et d'une action simplement transitive de  $(E, +)$  sur  $\mathcal{E}$ , où  $E$  est un espace vectoriel. On dit que  $E$  est la direction de  $\mathcal{E}$ . On appelle dimension de  $\mathcal{E}$  la dimension de  $E$ . On appelle droite affine un espace affine de dimension 1, plan affine un espace affine de dimension 2.

Dans ce contexte, les éléments de  $\mathcal{E}$  sont appelés les points et sont habituellement notés par des lettres majuscules  $A, B, C, M, \dots$ . Les éléments de  $E$  sont appelés les vecteurs et habituellement notés par des symboles comme  $\vec{0}, \vec{u}$ . L'action est notée additivement :  $A + \vec{u}$  est un point.

*Exemple.* L'action de  $(V, +)$  sur  $V$  par translation  $\mu(x, y) = x + y$  est simplement transitive (comme pour tout groupe) : tout espace vectoriel peut donc être vu comme un espace affine.

Étant donnés deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{E}$ , on note  $\overrightarrow{AB}$  l'unique élément de  $E$  tel que  $A + \overrightarrow{AB} = B$ . L'axiome d'action de groupe donne immédiatement la relation de CHASLES

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

On a également  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ .

Un espace affine est un espace vectoriel qui a oublié son origine. On a vu que tout espace vectoriel peut naturellement être vu comme un espace affine. Réciproquement, si  $\mathcal{E}$  est un espace affine d'espace directeur  $E$ , tout choix d'un point  $O \in \mathcal{E}$  induit une bijection  $\mathcal{E} \rightarrow E$

$$M \mapsto \overrightarrow{OM}$$

On peut via cette bijection munir  $\mathcal{E}$  d'une structure d'espace vectoriel (le «vectorialisé en  $O$ »), dans lequel le zéro est  $O$ , mais ce choix n'est pas canonique. Dans les preuves, on commence souvent par choisir une origine  $O$  pour remplacer tous les points  $M$  par les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$ .

On appelle *sous-espace affine* de  $\mathcal{E}$  l'orbite d'un sous-espace vectoriel de  $E$ , c'est à dire un sous-ensemble de la forme

$$\mathcal{F} = \{M + \vec{u} : \vec{u} \in F\}$$

où  $M \in \mathcal{E}$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On a alors

$$F = \{\overrightarrow{AB} : A, B \in \mathcal{F}\}$$

et même pour tout choix de  $O \in \mathcal{F}$

$$F = \{\overrightarrow{OM} : M \in \mathcal{F}\}.$$

En particulier, le sous-espace vectoriel  $F$  est unique, on l'appelle la direction de  $\mathcal{F}$ . On dit que deux sous-espaces affines sont parallèles (symbole  $\parallel$ ) s'ils ont même direction (en particulier, cette définition impose qu'ils ont même dimension : une droite ne peut pas être parallèle à un plan). Dans le cas d'un espace vectoriel vu comme espace affine, on retrouve la définition précédente. On dira aussi qu'un sous-espace affine  $\mathcal{E}_1$  (de direction  $E_1$ ) est *faiblement parallèle* à un sous-espace affine  $\mathcal{E}_2$  (de direction  $E_2$ ) si  $E_1 \subset E_2$ .

*Exercice.* Soient  $A, B, C, D$  quatre points d'un espace affine. Vérifier que l'on a  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  si et seulement si  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ . Dans ce cas, on dit que  $ABCD$  est un parallélogramme.

*Exercice.* Dans un espace affine, montrer que deux hyperplans affines disjoints sont parallèles.

*Exercice.* Soient  $\mathcal{E}_1 = A_1 + E_1$  et  $\mathcal{E}_2 = A_2 + E_2$  deux sous-espaces affines. Montrer qu'ils ont un point en commun si et seulement si  $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1 + E_2$ . Montrer qu'ils sont égaux si et seulement si  $E_1 = E_2$  et  $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1$ .

*Exercice.* Soit  $\mathcal{E}$  un plan affine sur le corps  $\{0, 1\}$ . Quel est le cardinal de  $\mathcal{E}$ ? Combien contient-il de droites affines? Faire un dessin. Quelles droites sont parallèles?

### 1.3 Barycentres

**Proposition.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine. Soient  $A_1, \dots, A_m$  des points de  $\mathcal{E}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  dans  $\mathbf{K}$  tels que  $s = \lambda_1 + \dots + \lambda_m \neq 0$ . Il existe un unique point  $B$  de  $\mathcal{E}$  tel que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \vec{0}. \quad (1.1)$$

Ce point  $B$  est appelé *barycentre* du système pondéré  $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_m, \lambda_m))$  et noté

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

ou parfois  $\text{bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_m, \lambda_m))$ .

*Exercice.* Montrer que si la fonction de  $\mathcal{E}$  dans  $E$  donnée par  $B \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$  est bijective si  $s \neq 0$  et constante si  $s = 0$ .

Par exemple, étant donnés deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{E}$ , on appelle milieu de  $A, B$  le barycentre de  $(A, 1), (B, 1)$ . C'est le point  $M$  défini par la relation  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ , où encore  $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ .

*Démonstration.* Fixons un point  $O \in \mathcal{E}$ . Pour tout  $B \in \mathcal{E}$ , on a

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \sum_{i=1}^m \lambda_i (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_i}) = s \overrightarrow{BO} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

La condition (1.1) est donc satisfaite si et seulement si

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{OA_i},$$

ce qui est le cas pour un unique  $B \in \mathcal{E}$ . □

Remarquons que si  $A_1, \dots, A_m$  appartiennent à un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ , c'est aussi le cas de leur barycentre.

Par exemple, étant donné deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{E}$ , on appelle milieu du segment  $AB$  le barycentre de  $(A, 1), (B, 1)$ . C'est le point  $M$  défini par la relation  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

Quand tous les poids sont égaux 1, on parle d'isobarycentre. Il faut faire attention quand on travaille avec des corps de caractéristique non nulle : par exemple, en caractéristique 2, un segment n'a pas de milieu...

On peut vérifier les propriétés suivantes des barycentres.

— Pour tout  $\alpha \neq 0$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \alpha\lambda_1 & \alpha\lambda_2 & \dots & \alpha\lambda_n \end{pmatrix}$$

On peut ainsi se ramener au cas  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ .

— Pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & A_{\sigma(2)} & \dots & A_{\sigma(n)} \\ \lambda_{\sigma(1)} & \lambda_{\sigma(2)} & \dots & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

— On peut retirer les points de poids nuls

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{n-1} \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

— On peut regrouper les points identiques

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & B & B \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n & \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & B \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n & \mu + \nu \end{pmatrix}$$

— On a la propriété d'associativité : si  $m < n$  et si  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m \neq 0$  et  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$ , alors

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & A_{m+1} & \dots & A_n \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_m & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où  $H = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$ .

Dans le cas d'un sous-espace affine d'un espace vectoriel, la notion de barycentre peut s'écrire à l'aide de la structure vectorielle : si  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , alors

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

## 1.4 Indépendance et engendrement affines

Les notions de familles libres et génératrices sont fondamentales en algèbre linéaire. Nous allons développer l'analogie affine de ces notions.

**Proposition.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine et  $(\mathcal{F}_i)$  une famille de sous-espaces affines telle que  $\bigcap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$ . Alors  $\bigcap \mathcal{F}_i$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ .

La preuve montrera aussi que l'intersection des directions est la direction de l'intersection.

*Démonstration.* Soit  $O \in \bigcap \mathcal{F}_i$ . Soit  $E$  la direction de  $\mathcal{E}$ . Pour tout  $i$ , on peut trouver un sous-espace vectoriel  $E_i \subset E$  tel que  $\mathcal{F}_i = O + E_i$ . On a donc

$$\bigcap \mathcal{F}_i = \bigcap (O + E_i) = O + \bigcap E_i$$

qui est bien un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ .  $\square$

On peut donc définir le sous-espace affine  $\text{aff}(\mathcal{A})$  engendré par une partie non vide  $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$  comme l'intersection de la famille de tous les sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  qui contiennent  $\mathcal{A}$  (cette famille est non vide car elle contient  $\mathcal{E}$ ; l'intersection est non vide car  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ).

**Proposition.** Si  $\mathcal{A}$  est une partie non vide de  $\mathcal{E}$ , l'ensemble  $\text{aff}(\mathcal{A})$  est l'ensemble de tous les barycentres d'éléments de  $\mathcal{A}$ .

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des barycentres d'éléments de  $\mathcal{A}$ . On vectorialise : soit  $O \in \mathcal{A}$ . Un sous-espace affine contenant  $O$  est de la forme  $O + F$  où  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Puisque  $\mathcal{A} \subset O + F$  si et seulement si  $\overrightarrow{OA} \in F$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , on en déduit donc que

$$\begin{aligned} \text{aff}(\mathcal{A}) &= O + \text{Vect}\{\overrightarrow{OA} : A \in \mathcal{A}\} \\ &= \left\{ O + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} : n \in \mathbf{N}, (\lambda_i) \in \mathbf{K}, A_i \in \mathcal{A} \right\} \end{aligned}$$

Un élément  $M$  de  $\text{aff}(\mathcal{A})$  s'écrit  $M = O + \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ . On a donc  $\overrightarrow{OM} = \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = (\sum \lambda_i) \overrightarrow{OM} + \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ . Ainsi,  $(1 - \sum \lambda_i) \overrightarrow{MO} + \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$ , donc

$$M = \begin{pmatrix} O & A_1 & \dots & A_n \\ 1 - \sum \lambda_i & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}. \quad (1.2)$$

On a montré que  $\text{aff}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$  et l'inclusion réciproque découle du fait qu'un sous-espace affine est stable par barycentre.  $\square$

### Fin cours # 1 du 16 janvier

Soient  $A_1, \dots, A_p$  des points de  $\mathcal{E}$ . On dit que les points  $A_1, \dots, A_p$  sont *affinement indépendants* si les vecteurs  $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_p}$  sont linéairement indépendants; quand ce n'est pas le cas, on dit que les points  $A_1, \dots, A_p$  sont *affinement liés*.

**Proposition.** Soient  $O, A_1, \dots, A_p$  des points de  $\mathcal{E}$ . Les points  $A_1, \dots, A_p$  sont affinement liés si et seulement si il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  non tous nuls tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 0$  et  $\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer, en écrivant  $\overrightarrow{A_1 A_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_1}$ , que la relation  $\lambda_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{A_1 A_p} = \overrightarrow{0}$  équivaut à  $-(\lambda_2 + \dots + \lambda_p) \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$ .  $\square$

Cette proposition montre que la définition d'indépendance affine ne dépend pas de l'ordre des points. Deux points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont distincts (on note  $(AB)$  la droite engendrée par deux points  $A \neq B$ ) ; trois points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont non alignés ; quatre points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont non coplanaires, etc.

On dit qu'une famille de points  $(A_1, \dots, A_p)$  est une *base affine* de  $\mathcal{E}$  si c'est une famille affinement indépendante et affinement génératrice (au sens où  $\mathcal{E} = \text{aff}(A_1, \dots, A_p)$ ). Cela équivaut à dire que les vecteurs  $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1 A_p}$  forment une base de l'espace vectoriel  $E$ . Si  $(A_1, \dots, A_p)$  est une base affine de  $\mathcal{E}$ , alors nécessairement  $\dim \mathcal{E} = p - 1$ . Tout point  $M \in \mathcal{E}$  s'écrit comme barycentre

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

et cette écriture est unique si on impose  $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$ . On dit que  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  sont les coordonnées barycentriques de  $M$  dans la base affine  $(A_1, \dots, A_p)$ .

Il existe une autre manière de paramétrer les points d'un espace affine. On appelle *repère affine* de  $\mathcal{E}$  la donnée d'un point  $O \in \mathcal{E}$  et d'une base  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $E$ . On obtient alors une bijection de  $\mathbf{K}^n$  dans  $E$  donnée par

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto O + \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$$

*Exercice.* ( $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ). Soient  $ABC$  3 points non alignés du plan affine. Les trois droites  $(AB)$ ,  $(AC)$  et  $(BC)$  délimitent 7 régions du plan. Connaissant les coordonnées barycentriques d'un point dans la base affine  $(A, B, C)$ , comment déterminer à quelle région il appartient ?

*Exercice.* Soient  $A, B, C$  trois points non alignés du plan affine. Définir les médianes du triangle  $ABC$  et montrer qu'elles s'intersectent en un unique point.

*Exercice.* Soient  $A, B, C, D$  quatre points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On appelle bimédiane du tétraèdre  $ABCD$  les droites passant par les milieux de deux arêtes disjointes du tétraèdre. Montrer que les trois bimédianes s'intersectent en un unique point.

*Exercice difficile.* Soit un ensemble fini de points du plan affine  $\mathbf{R}^2$  ayant la propriété suivante : toute droite qui contient deux des points en contient au moins trois. Montrer que tous les points sont alignés. Donner un exemple de corps pour lequel l'énoncé analogue est faux.

## 1.5 Convexité

Dans cette section, on suppose  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ . On va utiliser de manière cruciale les notions d'ordre et de positivité. Si  $A$  et  $B$  sont deux points d'un espace affine réel. Ils définissent un segment

$$[AB] = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ s & t \end{pmatrix} : s, t \geq 0, s + t = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

On dit qu'une partie  $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$  est convexe si on a  $[AB] \subset \mathcal{C}$  pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{C}$ .

Il est élémentaire de voir que l'intersection d'une famille quelconque de parties convexes est convexe. On peut donc définir l'enveloppe convexe d'une partie  $\mathcal{A}$  d'un espace affine réel, notée  $\text{conv}(\mathcal{A})$ , comme l'intersection de toutes les parties convexes contenant  $\mathcal{A}$ . On a la caractérisation équivalente suivante de l'enveloppe convexe comme l'ensemble des barycentres à poids positifs d'éléments de  $\mathcal{A}$  (on parle parfois de combinaisons convexes).

**Proposition.** Si  $\mathcal{A}$  est une partie d'un espace affine réel, alors

$$\text{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_m \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} : m \in \mathbf{N}^*, A_i \in \mathcal{A}, \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1 \right\}.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B}$  le membre de droite dans l'équation précédente. Une partie convexe est stable par barycentres à poids positif (cela se démontre par récurrence sur le nombre de points en utilisant la propriété d'associativité des barycentres). On en déduit que toute partie convexe contenant  $\mathcal{A}$  contient  $\mathcal{B}$ , d'où l'inclusion  $\text{conv}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{B}$ .

Par ailleurs, il découle aussi de la propriété d'associativité du barycentre que  $\mathcal{B}$  est convexe, et donc que  $\text{conv}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ .  $\square$

A priori, la description précédente nécessite de considérer des combinaisons convexes de longueur arbitrairement grande. Le résultat suivant permet de préciser ce point.

**Théorème** (Carathéodory). Soit  $\mathcal{A}$  une partie d'un espace affine de dimension  $n$ . Alors

$$\text{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_{n+1} \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} : A_i \in \mathcal{A}, \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1 \right\}.$$

*Démonstration.* Soit  $A \in \text{conv}(\mathcal{A})$ . Soit  $p \in \mathbf{N}$  minimal tel que  $A$  s'écrive

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

avec  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $\lambda_i \geq 0$  et  $\sum \lambda_i = 1$ . En fixant une origine  $O \in \mathcal{A}$ , on a donc

$$\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

Supposons  $p > n + 1$ . Alors les points  $A_1, \dots, A_p$  sont affinement liés, et donc il existe des scalaires non tous nuls  $(\mu_i)$  vérifiant  $\mu_1 + \cdots + \mu_p = 0$  et  $\mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \mu_p \overrightarrow{OA_p} = \vec{0}$ . On a donc, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ \lambda_1 + t\mu_1 & \cdots & \lambda_p + t\mu_p \end{pmatrix}$$

Soit  $t > 0$  minimal tel que l'un des nombres  $\lambda_i + t\mu_i$  soit nul (un tel  $t$  existe bien : les hypothèses sur  $(\mu_i)$  impliquent qu'au moins l'un d'entre eux est strictement négatif). Pour ce choix de  $t$ , les scalaires  $\lambda_i + t\mu_i$  sont  $\geq 0$  et l'un d'entre eux est nul, ce qui permet d'écrire  $A$  comme barycentre de longueur  $< p$ , contredisant la minimalité de  $p$ .  $\square$

*Exercice.* Soit  $\mathcal{A}$  une partie compacte de l'espace affine  $\mathbf{R}^n$ . Montrer que  $\text{conv}(\mathcal{A})$  est compact.

*Exercice.* (Théorème de Radon) Dans un espace affine réel de dimension  $n$ , on considère une partie  $\mathcal{A}$  de cardinal  $n + 2$ . Montrer qu'il existe une partition  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  telle que  $\text{conv}(\mathcal{B}) \cap \text{conv}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$ .

*Exercice difficile.* (Théorème de Helly) Soit  $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de parties convexes d'un espace affine réel de dimension  $d$ , avec  $n \geq d + 1$ . On suppose que toute sous-famille de cardinal  $d + 1$  a une intersection non vide. Montrer que  $\bigcap_{1 \leq i \leq n} C_i$  est non vide. **Indication :** Montrer le résultat par récurrence sur  $n$  en appliquant le théorème de Radon.

## 1.6 Applications affines

Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines de directions respectives  $E$  et  $F$ . On dit qu'une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est *affine* si il existe une application linéaire  $\phi : E \rightarrow F$  telle que, pour tous points  $M, N$  de  $\mathcal{E}$  on ait

$$\phi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{\phi(M)\phi(N)}.$$

De manière équivalente, pour tous  $M \in \mathcal{E}$  et  $\vec{u} \in E$ , on a

$$f(M + \vec{u}) = f(M) + \phi(\vec{u}).$$

Si  $f$  est affine, l'application linéaire  $\phi$  vérifiant cette condition est unique et appelée application linéaire *associée* à  $f$ . Elle est parfois notée  $\vec{f}$ .

Il est parfois utile, quand il n'y a pas d'ambiguïté, de noter  $M'$  l'image d'un point  $M$  par une application affine.

*Exemple.* Si  $\vec{u} \in E$ , la translation de vecteur  $\vec{u}$  est l'application affine  $M \mapsto M'$  définie  $M' = M + \vec{u}$  ou encore  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ . Les translations sont les applications affines dont la partie linéaire est l'identité.

*Exemple.* Soit  $O$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . On appelle *homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\lambda$*  l'application affine  $M \mapsto M'$  définie par la relation  $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$ . Quand  $\lambda = -1$ , on parle plutôt de *symétrie centrale*.

Soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  une application affine et  $\vec{f}$  l'application linéaire associée. Pour tout sous-espace affine  $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$  de direction  $E_1$ , l'image  $f(\mathcal{E}_1)$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{F}$  de direction  $\vec{f}(E_1)$ . On peut caractériser les applications affines comme celles préservant les barycentres.

**Théorème.** Soient  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  une application entre espaces affines. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'application  $f$  est affine.
2. Pour  $A_1, \dots, A_n$  dans  $\mathcal{E}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  dans  $\mathbf{K}$  tels que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$

$$\text{si } M = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ alors } f(M) = \begin{pmatrix} f(A_1) & \dots & f(A_n) \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Fin cours # 2 du 23 janvier

*Démonstration.* On note  $M'$  l'image par  $f$  d'un point  $M$ . Supposons  $f$  affine. Si on suppose que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$$

alors par linéarité de l'application linéaire associée à  $f$ , on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{M'A_i} = \vec{0}$$

d'où  $1 \implies 2$ .

Pour la réciproque, soit  $M \mapsto M'$  une application qui préserve les barycentres. Il faut montrer que l'application  $\overrightarrow{MN} \mapsto \overrightarrow{M'N'}$  est bien définie et linéaire. Fixons un repère



affine  $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $\mathcal{E}$ . Posons  $A_i = O + \vec{e}_i$ . Un point quelconque  $M \in \mathcal{E}$  s'écrit  $M = O + \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$ . On a donc

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

en on déduit (cette équation pouvant se réécrire comme un barycentre, cf (1.2)) que

$$\overrightarrow{O'M'} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{O'A'_i}.$$

Soit  $N = O + \mu_1 \vec{e}_1 + \dots + \mu_n \vec{e}_n$  un autre point. On a donc

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda_i) \vec{e}_i$$

et

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'} = \sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda_i) \overrightarrow{A_i A'_i}.$$

Il s'ensuit que l'application  $\overrightarrow{MN} \mapsto \overrightarrow{M'N'}$  est bien définie et linéaire (c'est l'unique application linéaire envoyant  $\vec{e}_i$  sur  $\overrightarrow{A_i A'_i}$ ), d'où le résultat.  $\square$

La proposition suivante est très facile.

**Proposition.** Soient  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  deux espaces affines. On note  $E_2$  la direction de  $\mathcal{E}_2$ .

1. Soient  $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  un repère affine de  $\mathcal{E}_1$ ,  $P$  un point de  $\mathcal{E}_2$  et  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$  des vecteurs de  $E_2$ . Il existe une unique application affine de  $\mathcal{E}_1$  dans  $\mathcal{E}_2$  qui envoie  $O$  sur  $P$  et telle que l'application linéaire associée envoie  $\vec{e}_i$  sur  $\vec{f}_i$ .
2. Soient  $A_1, \dots, A_p$  une base affine de  $\mathcal{E}_1$  et  $B_1, \dots, B_p$  des points de  $\mathcal{E}_2$ . Il existe une unique application affine de  $\mathcal{E}_1$  dans  $\mathcal{E}_2$  qui envoie  $A_i$  sur  $B_i$ .

*Exercice.* Montrer qu'une application affine possède un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de l'application linéaire associée.

Une application affine préserve l'alignement ; la réciproquement est partiellement vraie et connue sous le nom de théorème fondamental de la géométrie affine : une bijection d'un espace affine réel de dimension  $\geq 2$  qui préserve l'alignement est affine. Pour se convaincre de la nécessité des hypothèses, on remarquera que toute fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  préserve l'alignement, et que toute fonction entre espaces affines sur le corps  $\{0, 1\}$  préserve l'alignement.

*Problème.* (Théorème «fondamental» de la géométrie affine) Soit  $\mathcal{E}$  le plan affine sur réel et  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une bijection qui préserve l'alignement (c'est-à-dire que si  $A, B, C$  sont trois points alignés, leurs images  $f(A), f(B), f(C)$  sont alignées). On veut montrer que  $f$  est affine.

1. Montrer que l'image d'une droite est une droite ; que les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; que l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.

2. Soit  $M$  un point et  $\vec{u} \neq \vec{0}$  un vecteur. On définit  $\vec{v}$  par la relation  $f(M + \vec{u}) = f(M) + \vec{v}$ . Montrer que l'on peut définir une fonction  $\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  par la formule  $f(M + t\vec{u}) = f(M) + \lambda(t)\vec{v}$ . Montrer que pour tous réels  $s, t$  on a  $\lambda(s + t) = \lambda(s) + \lambda(t)$  et  $\lambda(st) = \lambda(s)\lambda(t)$  (autrement dit,  $\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est un automorphisme de corps). En déduire que  $\lambda = \text{id}_{\mathbf{R}}$ , puis que  $f$  est affine.
3. Donner un exemple de bijection du plan affine complexe  $\mathbf{C}^2$  qui préserve l'alignement mais qui n'est pas affine.

## 1.7 Le groupe affine

Rappelons que si  $E$  est un espace vectoriel, on désigne par  $\text{GL}(E)$  le groupe des applications linéaires bijectives de  $E$  dans  $E$ . Si  $\mathcal{E}$  est un espace affine de direction  $E$ , on note  $\text{GA}(\mathcal{E})$  l'ensemble des applications affines bijectives de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ .

**Proposition.** *La composition de deux applications affines est une application affine, et on a  $\overrightarrow{f_2 \circ f_1} = \overrightarrow{f_2} \circ \overrightarrow{f_1}$ . L'ensemble  $\text{GA}(\mathcal{E})$  est un groupe pour la loi de composition. L'application  $f \mapsto \overrightarrow{f}$  est un morphisme de groupes de  $\text{GA}(\mathcal{E})$  dans  $\text{GL}(E)$ .*

*Démonstration.* Soient  $f_1$  et  $f_2$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  deux applications affines de parties linéaires respectives  $\overrightarrow{f_1}$  et  $\overrightarrow{f_2}$ . Alors pour  $A, B$  dans  $\mathcal{E}$

$$\overrightarrow{f_2(f_1(A))f_2(f_1(B))} = \overrightarrow{f_2(f_1(A)f_1(B))} = \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{AB}))$$

donc  $f_2 \circ f_1$  est affine, et l'application linéaire associée est  $\overrightarrow{f_2} \circ \overrightarrow{f_1}$ .

Soit  $f$  une application affine. Fixons  $O \in \mathcal{E}$ . Alors  $f$  est l'application  $M \mapsto f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$  et donc  $f$  est bijective si et seulement si  $\overrightarrow{f}$  est bijective ; dans ce cas l'application réciproque, donnée par  $N \mapsto O + (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{f(O)N})$  est affine.  $\square$

On dit qu'une transformation affine  $f \in \text{GA}(\mathcal{E})$  est une *dilatation* (on dit parfois : une *homothétie-translation*) si son application linéaire associée est  $\lambda \text{Id}$  pour  $\lambda \in \mathbf{K}^*$  (on dit que  $\lambda$  est le rapport de  $f$ ). L'image d'un sous-espace affine par une dilatation est un sous-espace affine parallèle.

**Proposition.** *1. L'ensemble des dilatations forme un sous-groupe de  $\text{GA}(\mathcal{E})$ .*

*2. Les dilatations de rapport 1 sont les translations.*

*3. Les dilatations de rapport  $\lambda \neq 1$  sont les homothéties de rapport  $\lambda$  ; leur seul point fixe est leur centre.*

*Démonstration.* Le seul point qui n'est pas évident est le dernier. Soit  $f$  une dilatation de rapport  $\lambda \neq 1$ . Fixons  $O \in \mathcal{E}$ . Un point  $M$  est fixé par  $f$  si et seulement si

$$M = f(M) = f(O) + \lambda \overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{f(O)M} = \lambda \overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{Of(O)} = (1 - \lambda) \overrightarrow{OM}$$

ce qui est le cas si et seulement si  $M = O + \frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{Of(O)}$ . Dans ce cas  $f$  est l'homothétie de centre  $M$  et de rapport  $\lambda$ , notée  $h_{M,\lambda}$ .  $\square$

*Exercice.* Déterminer la table de multiplication du groupe des dilatations en calculant  $\tau_x \circ \tau_y$ ,  $\tau_x \circ h_{M,\lambda}$ ,  $h_{M,\lambda} \circ \tau_x$ ,  $h_{M,\lambda} \circ h_{N,\mu}$ .

*Exercice.* Déterminer le centre du groupe  $\text{GA}(\mathcal{E})$ .

*Exercice.* Montrer que l'application de  $E \times \text{GL}(E)$  dans  $\text{GA}(\mathcal{E})$  donnée par  $(x, \phi) \mapsto \tau_x \circ \phi$  est une bijection. Est-ce que les groupes  $E \times \text{GL}(E)$  et  $\text{GA}(\mathcal{E})$  sont isomorphes ?

## 1.8 Les théorèmes classiques de géométrie affine

Si  $A, B, C$  sont trois points alignés de  $\mathcal{E}$  tels que  $A \neq C$ , il existe un unique  $\lambda \in \mathbf{K}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ . On définit alors

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \lambda.$$

Plus généralement, si  $A, B, C, D$  sont des points tels que  $A \neq C$  et  $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{AC}$ , on pose  $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AC}} = \lambda$ .

**Théorème** (Thalès). *Dans un espace affine, soit  $ABB'$  des points affinement indépendants, et  $C, C'$  distincts des précédents tels que  $A, B, C$  et  $A', B', C'$  sont alignés. Alors*

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AC'}} \iff (BB') \parallel (CC')$$

et si c'est le cas on a  $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{CC'}}$

*Démonstration.* Il existe  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AB'} = \mu \overrightarrow{AC'}$ . Alors  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{CA} + \mu \overrightarrow{AC'} = (\lambda - \mu) \overrightarrow{CA} + \mu \overrightarrow{CC'}$ . Puisque  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BB'}$  sont linéairement indépendants, on a  $(CC') \parallel (BB')$  si et seulement si  $\lambda = \mu$ . Si c'est le cas, on a aussi  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{CA} + \lambda \overrightarrow{AC'} = \lambda \overrightarrow{CC'}$ .  $\square$

**Proposition.** *Dans un espace affine, soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites parallèles distinctes,  $B \neq C$  deux points distincts de  $\mathcal{D}$  et  $C' \neq B'$  deux points distincts de  $\mathcal{D}'$ . Il existe une (unique) dilatation  $f$  telle que  $f(B) = B'$  et  $f(C) = C'$ . C'est une translation si  $(BB') \cap (CC') = \emptyset$  et sinon une homothétie de centre  $O$ , où  $(BB') \cap (CC') = \{O\}$ .*

*Démonstration.*  $\mathcal{P} = \text{aff}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}') = \text{aff}(B, C, B')$  est un plan ; dans ce plan les deux droites distinctes  $(BB')$  et  $(CC')$  sont soit disjointes, soit d'intersection réduite à un point.

Si  $(BB') \cap (CC') = \emptyset$ , alors  $(BB') \parallel (CC')$ . Il existe donc des scalaires  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbf{K}^*$  tels que  $\overrightarrow{CC'} = \lambda \overrightarrow{BB'}$  et  $\overrightarrow{B'C'} = \mu \overrightarrow{BC}$ . On a  $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \mu \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{BB'}$ . Puisque  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BB'}$  sont libres, on en déduit que  $\lambda = \mu = 1$ . Si on pose  $\vec{v} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$ , alors la translation  $\tau_{\vec{v}}$  convient.

Si  $(BB') \cap (CC') = \{O\}$ , alors  $O \neq B$  et  $O \neq B'$ , donc il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$  tel que  $\overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OB}$ . Puisque  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ , le théorème de Thalès implique que  $\overrightarrow{OC'} = \lambda \overrightarrow{OC}$ , donc l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\lambda$  convient.

L'unicité est laissée en exercice.  $\square$

**Fin cours # 3 du 6 février**

**Théorème** (Pappus, version affine). *Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites distinctes d'un espace affine. Soient  $A, B, C$  trois points distincts de  $\mathcal{D}$  et  $A', B', C'$ , trois points distincts de  $\mathcal{D}'$ . On suppose qu'aucun de ces points n'est commun à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Si  $(AB') \parallel (A'B)$  et  $(BC') \parallel (B'C)$  alors  $(AC') \parallel (A'C)$ .*

*Démonstration.* On utilise la proposition précédente. Soit  $f$  la dilatation qui vérifie  $f(A) = B$  et  $f(B') = A'$ , et soit  $g$  la dilatation qui vérifie  $g(B) = C$  et  $g(C') = B'$ . Ce sont soit deux translations, soit deux homothéties de même centre. Dans les deux cas, elles commutent. Si on pose  $h = g \circ f = f \circ g$ , alors  $h(A) = C$  et  $h(C') = A'$ . Comme  $h$  est une dilatation, on a donc  $(AC') \parallel (A'C)$ .  $\square$

**Théorème** (Desargues, version affine). Soient  $A, B, C, A', B', C'$  six points distincts d'un espace affine tels que  $A, B, C$  et  $A', B', C'$  soient affinement indépendants. On suppose que  $(AB) \parallel (A'B')$ ,  $(BC) \parallel (B'C')$  et  $(AC) \parallel (A'C')$ . Alors les trois droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont soit concourantes, soit parallèles.

*Démonstration.* Soit  $f$  la dilatation qui vérifie  $f(A) = A'$  et  $f(B) = B'$ . Alors  $(AC) \parallel (A'f(C))$  et  $(BC) \parallel (B'f(C))$  puisque l'image d'une droite par une dilatation est une droite parallèle. On a donc  $(A'C') = (A'f(C))$  et  $(B'C') = (B'f(C))$ . Puisque  $A', B', C'$  sont affinement indépendants, on a  $(A'B') \cap (BC') = \{C'\}$  et donc  $f(C) = C'$ . Si  $f$  est une translation, les trois droites sont parallèles ; si  $f$  est une homothétie de centre  $M$ , les trois droites s'intersectent en  $M$ .  $\square$

**Théorème** (Ménélaüs). Soient  $A, B, C$  trois points affinement indépendants. Soit  $A' \in (BC)$ ,  $B' \in (AC)$  et  $C' \in (AB)$  trois points distincts de  $A, B, C$ . Les points  $A', B', C'$  sont alignés si et seulement si  $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1$ .

*Démonstration.* Soit  $h_1$  l'homothétie de centre  $A'$  vérifiant  $h_1(B) = C$ , soit  $h_2$  l'homothétie de centre  $B'$  vérifiant  $h_2(C) = A$  et soit  $h_3$  l'homothétie de centre  $C'$  vérifiant  $h_3(A) = B$ . Si on note  $\lambda_i$  le rapport de  $h_i$ , alors

$$\lambda_1 = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}, \quad \lambda_2 = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}, \quad \lambda_3 = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

et ces rapports sont distincts de 1 puisque les points  $A, B, C$  sont distincts. La dilatation  $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$  a  $B$  comme point fixe et est donc une homothétie de rapport  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ .

L'application  $h_2 \circ h_1$  préserve la droite  $(A'B')$  puisqu'elle passe par le centre des deux homothéties. Ainsi  $h$  préserve  $(A'B')$  si et seulement si  $h_3$  préserve  $(A'B')$ , ce qui revient à dire (puisque  $\lambda_3 \neq 1$ ) que les points  $A', B', C'$  sont alignés.

Comme  $B \notin (A'B')$ , l'homothétie  $h$  de centre  $B$  préserve  $(A'B')$  si et seulement si son rapport est 1, d'où le résultat.  $\square$

On énonce sans preuve un dernier théorème.

**Théorème** (Céva). Soient  $A, B, C$  trois points affinement indépendants. Soit  $A' \in (BC)$ ,  $B' \in (AC)$  et  $C' \in (AB)$  trois points distincts de  $A, B, C$ . Les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes ou parallèles si et seulement si  $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = -1$ .

## Chapitre 2

# Géométrie projective

### 2.1 Premier contact

Commençons par donner une introduction informelle où on cherche à construire la géométrie projective afin de «compléter» la géométrie affine. Un plan affine  $\mathcal{E}$  vérifie les deux propriétés suivantes

- (A) Par 2 points (distincts) passe 1 droite (unique).
- (B) 2 droites (distinctes) s'intersectent en 0 ou 1 point.

Il y a une asymétrie disgracieuse entre ces deux axiomes, on aimerait pouvoir remplacer «0 ou 1» par «1» dans (B).

Soit  $E$  la direction de  $\mathcal{E}$ . On note  $\mathbf{P}(E)$  l'ensemble des droites vectorielles de  $E$  et on pose

$$\mathbf{P} = \mathcal{E} \cup \mathbf{P}(E)$$

où l'union est disjointe. Autrement dit, on a rajouté un «point à l'infini» dans chaque direction. On appelle point un élément de  $\mathbf{P}$  et on appelle droite une partie de  $\mathbf{P}$  de la forme  $\mathcal{D} \cup \{D\}$  où  $\mathcal{D}$  est une droite affine et  $D$  est sa direction. On obtient ainsi une nouvelle notion de droite pour laquelle l'axiome (B) est vérifié.

Cependant, l'axiome (A) est en défaut car par deux points (distincts) à l'infini ne passe aucune droite. La solution est de décréter que  $\mathbf{P}(E)$  est également une droite, dite droite de l'infini. Avec cette convention-là, les axiomes (A) et (B) sont satisfaits.

### 2.2 L'espace projectif associé à un espace vectoriel

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel. On appelle l'espace projectif associé à  $E$  et on note  $\mathbf{P}(E)$  l'ensemble des droites vectorielles de  $E$ .

Si  $x$  et  $y$  sont des vecteurs non nuls de  $E$ , alors on a  $\text{vect}(x) = \text{vect}(y)$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont proportionnels. Si on munit  $E \setminus \{0\}$  de la relation d'équivalence

$$x \sim y \iff \text{vect}(x) = \text{vect}(y) \iff \exists \lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0\} : x = \lambda y,$$

alors  $\mathbf{P}(E)$  s'identifie à l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation.

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\mathbf{P}(F)$  est un sous-ensemble de  $\mathbf{P}(E)$  car toute droite vectorielle de  $F$  est une droite vectorielle de  $E$ . On dit qu'une partie  $\mathcal{A} \subset \mathbf{P}(E)$  est un *sous-espace projectif* (s.e.p.) s'il existe un sous-espace vectoriel  $F \subset E$  tel que  $\mathcal{A} = \mathbf{P}(F)$ .

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , on définit la dimension de  $\mathbf{P}(F)$  comme étant égale à  $n - 1$ . Pour tout  $x \in \mathbf{P}(E)$ , l'ensemble  $\{x\}$  est sous-espace projectif de dimension 0 ; on dira que  $x$  est un point de l'espace projectif  $\mathbf{P}(E)$ .

On appelle droite projective un (sous-)espace projectif de dimension 1 et plan projectif un (sous-)espace projectif de dimension 2. Commençons par vérifier que cette construction respecte bien les propriétés (A) et (B).

**Proposition.** *Étant donnés deux points distincts d'un espace projectif, il existe une unique droite projective contenant ces deux points.*

*Démonstration.* Il suffit de traduire l'énoncé en termes d'espaces vectoriels : si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux droites vectorielles distinctes d'un espace vectoriel  $E$ , alors il existe un unique plan vectoriel qui contient  $D_1$  et  $D_2$  : c'est le plan  $\text{vect}(D_1 \cup D_2)$ .  $\square$

**Proposition.** *Deux droites projectives distinctes d'un plan projectif s'intersectent en un unique point.*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{P}(E)$  un plan projectif (c'est-à-dire que  $E$  est un espace vectoriel de dimension 3) et  $D_1 \neq D_2$  deux droites projectives distinctes de  $\mathbf{P}(E)$ . Il existe des sous-espaces vectoriels  $F_i \subset E$ , de dimension 2, tels que  $D_1 = \mathbf{P}(F_1)$  et  $D_2 = \mathbf{P}(F_2)$ . Leur intersection  $D_1 \cap D_2$  coïncide avec  $\mathbf{P}(F_1 \cap F_2)$ . Comme  $F_1 \neq F_2$ , on a  $F_1 + F_2 = E$  et la formule de Grassmann implique que

$$\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 + F_2) = 2 + 2 - 3 = 1$$

donc  $\mathbf{P}(F_1 \cap F_2)$  est un singleton.  $\square$

Fin cours # 4 du 27 février