deux à deux distinctes. On note $A_{ij} = d_i \cap d'_j$. Alors les droites $(A_{12}A_{21})$, $(A_{13}A_{31})$ et $(A_{23}A_{32})$ sont concourantes.

Fin cours # 6 du 27 mars

Rappelons également le théorème de Desargues affine

Théorème (Théorème de Desargues affine)**.** *Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts d'un espace affine tels que A, B, C et A', B', C' soient affinement indépendants. Alors*

(i) $(AB) /\!/ (A'B')$, $(BC) /\!/ (B'C')$ et $(AC) /\!/ (A'C')$

implique

(ii) les trois droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont soit concourantes, soit parallèles.

et déduisons-en sa version projective

Théorème (Théorème de Desargues projectif)**.** *Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts d'un plan projectif tels que les droites $a = (BC)$, $b = (AC)$, $c = (AB)$ et $a' = (B'C')$, $b' = (A'C')$, $c' = (A'B')$ soient distinctes. On considère les points $P = a \cap a'$, $Q = b \cap b'$ et $R = c \cap c'$ et les droites $p = (AA')$, $q = (BB')$ et $r = (RR')$. Il y équivalence entre*

1. *les droites p, q et r sont concourantes,*
2. *les points P, Q et R sont alignés.*

Démonstration. Montrons que (2) implique (1) en envoyant la droite $(PQ) = (PR)$ à l'infini. Les six points sont dans le plan affine $\mathcal{E} = \mathbf{P}(E) \setminus (PQ)$, et on a $(AB) /\!/ (A'B')$, $(BC) /\!/ (B'C')$, $(AC) /\!/ (A'C')$. Le théorème de Desargues affine implique que les droites p, q et r sont concourantes ou parallèles dans $\mathcal{E}$, donc concourantes dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$.

Enfin, il suffit de remarquer que l'énoncé dual de l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) est exactement l'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) ! La dualité échange A et a, B et b, etc.. , «points alignés» et «droites concourantes», «$a = (BC)$» et «$A = b \cap c$». □

On obtient alors un renforcement de l'énoncé affine : on a l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) dans l'énoncé affine !

si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ transformation affine
si $C = \mathrm{bar}\left(\frac{A}{\lambda} \Big| \frac{B}{1-\lambda}\right)$ alors $f(C) = \mathrm{bar}\left(\frac{f(A)}{\lambda} \Big| \frac{f(B)}{1-\lambda}\right)$

2.7 Birapport

On a vu que les transformations affines préservent les rapports : si A, B, C sont trois points alignés d'images A', B', C' par une transformation affine, alors ... De la même manière, nous allons voir que les transformations projectives préservent les birapports de 4 points.

On identifie $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ à $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$ via l'abscisse projective.

Soit D une droite projective et x, y, z, w quatre points distincts de D. Il existe une unique homographie $\phi : D \to \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ telle que $\phi(x) = \infty$, $\phi(y) = 0$ et $\phi(z) = 1$. On appelle birapport du quadruplet (x, y, z, w) et on note $[x, y, z, w]$ l'élément $\phi(w)$ de $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$. En réalité, le birapport n'est jamais égal à 0, 1 ou ∞.

Proposition. *Si x, y, z, w sont quatre points distincts de la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$, leur birapport est donné par*

$$\boxed{[x, y, z, w] = \frac{\dfrac{w-y}{w-x}}{\dfrac{z-y}{z-x}} = \left[\begin{vmatrix} x_0 & w_0 \\ x_1 & w_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_0 & z_0 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_0 & w_0 \\ y_1 & w_1 \end{vmatrix}\right]}$$

C'est un élément de $\mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$.

si $x = [x_0 : x_1]$
$y = [y_0 : y_1]$
$z = [z_0 : z_1]$
$w = [w_0 : w_1]$

Lemme. Soient $x, y, z \in K^2 \setminus 0$ tq

$$\begin{array}{ccc} [x] & \neq & [y] \\ \neq & \neq & \\ & [z] & \end{array}$$

ALORS $\exists ! [\varphi] \in PGL_2(K) = PGL(K^2)$,

$\varphi([x]) = 0$, $\varphi([y]) = 1$, $\varphi([z]) = \infty$ dans $\mathbb{P}^1(K)$

où $0 = [1:0]$, $1 = [1:1]$, $\infty = [0:1]$

démo. Existence

$[x] \neq [z] \Leftrightarrow x, z$ non colinéaires dans K^2

$\Leftrightarrow (x, z)$ base de K^2

$\rightarrow y = \alpha x + \beta z$ $\quad \alpha, \beta \neq 0$

(car $[y] \neq [x]$, $[y] \neq [z]$)

Soit $\varphi : K^2 \to K^2$

$(1,0) \longmapsto \alpha x$

$(0,1) \longmapsto \beta z$

$\Rightarrow \varphi(1,1) = \alpha x + \beta z = y$

donc $\varphi(0) = \varphi([1:0]) = [\varphi(1,0)] = [\alpha x] = [x]$

$\varphi(\infty) = [z]$

$\varphi(1) = [\varphi(1,1)] = [y]$

φ^{-1} convient.

Unicité

Il suffit de mq

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=1,\ \varphi(\infty)=\infty \Rightarrow \varphi \in K^* I_2.$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\varphi=\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \qquad \varphi=\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & d \end{pmatrix}$$

$$\varphi=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow a=d$$

$$\varphi=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Définition. Si $[x] \neq [y] \neq [z] \in \mathbb{P}^1(K)$, $[x]\neq[z]$

Si $[w] \in \mathbb{P}^1(K)$

on note $[x:y:z:w] \in \mathbb{P}^1(K) = K \cup \infty$

BIRAPPORT

$$[1:t] \longleftarrow t$$

$$[0:1] \longleftarrow \infty$$

l'élément $[x:y:z:w]=\varphi([w])$ où φ est l'unique homographie tq $\varphi([x])=\infty$, $\varphi([y])=0$, $\varphi([z])=1$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'homographie

$$\alpha \mapsto \frac{\dfrac{\alpha - y}{\alpha - x}}{\dfrac{z - y}{z - x}}$$

est l'unique ϕ de la définition précédente. $\square$

Les birapports sont conservés par les homographies. $\mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K)$

Proposition. *Soient D et D' des droites projectives et $f : D \to D'$ une bijection. Alors il y a équivalence entre*

1. *f est une homographie,*
2. *f préserve le birapport, c'est-à-dire que si x, y, z, w sont des points distincts de D, alors*
$$[f(x), f(y), f(z), f(w)] = [x, y, z, w].$$

Démonstration. Supposons que f est une homographie. Il suffit de remarquer que si $\phi : D' \to \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ est l'homographie qui envoie $(f(x), f(y), f(z))$ sur $(\infty, 0, 1)$, alors $\phi \circ f : D \to \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ est l'homographie que envoie (x, y, z) sur $(\infty, 0, 1)$.

Réciproquement, supposons que f préserve le birapport. Il existe une homographie $g : D \to D'$ qui envoie (x, y, z) sur $(f(x), f(y), f(z))$. Montrons que $f = g$: pour tout w dans D, on a

$$[f(x), f(y), f(z), f(w)] = [x, y, z, w] = [g(x), g(y), g(z), g(w)]$$

et l'égalité $f(w) = g(w)$ découle du fait que la fonction $\alpha \mapsto [x, y, z, \alpha]$ est une bijection de $D \setminus \{x, y, z\}$ dans $\mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$. $\square$

Permutations

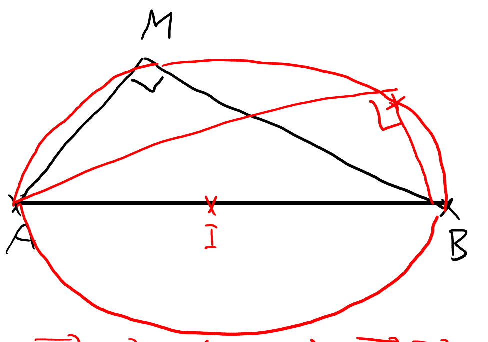
si $b = [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}^1(K) = K \cup \infty$

alors $b = [x_2 : x_1 : x_4 : x_3] = [x_3 : x_4 : x_1 : x_2] = [x_4 : x_3 : x_2 : x_1]$

et $[x_2 : x_1 : x_3 : x_4] = \dfrac{1}{b}$

$[x_1 : x_3 : x_2 : x_4] = 1 - b$

$[x_2 : x_3 : x_4 : x_1] = 1 - \dfrac{1}{1-b}$



$\vec{IB} = -\vec{IA}$

$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA})(\vec{MI} - \vec{IA})$
$= MI^2 - IA^2$

Chapitre 3

Géométrie affine euclidienne

3.1 Espaces affines euclidiens

Dans ce chapitre, on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. On rappelle qu'un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$. On pose alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. On appelle espace affine euclidien un espace affine $\mathcal{E}$ dont la direction E est un espace euclidien.

On peut alors munir $\mathcal{E}$ d'une distance en posant pour A, B dans $\mathcal{E}$

$$d(A, B) = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Dans tout ce chapitre, on fixe un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de direction E. On peut alors donner une caractérisation métrique de certains concepts de géométrie affine.

Proposition. *Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$. Alors*

1. *le segment $[AB]$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $AB = AM + BM$.*
2. *un point $I \in \mathcal{E}$ est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $AI = BI = \frac{1}{2}AB$.*

Démonstration. C'est le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne. Soit $M \in \mathcal{E}$. On écrit $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$ pour $\lambda \in \mathbf{E}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$. On a alors $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = (\lambda - 1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$. Par le théorème de Pythagore, il vient

$$AM^2 = \lambda^2 AB^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2$$

$$BM^2 = (1 - \lambda)^2 AB^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2$$

On a donc $AM \geqslant |\lambda| AB$ et $BM \geqslant |1 - \lambda| AB$ (avec à chaque fois égalité si et seulement si $\overrightarrow{u} = 0$) et donc $AM + BM \geqslant (|\lambda| + |1 - \lambda|)AB$. Il y a égalité si et seulement si $\overrightarrow{u} = 0$ et $\lambda \in [0, 1]$, donc si et seulement si $M \in [AB]$. □

On appelle sphère de centre $A \in \mathcal{E}$ et de rayon $r \geqslant 0$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $AM = r$. Dans un plan affine euclidien, on parlera plutôt de cercle.

Théorème (Théorème de l'angle droit)**.** *Soient A, B deux points de $\mathcal{E}$. L'ensemble*

$$\{M \in \mathcal{E} \ : \ \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}\}$$

est la sphère de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $IA = IB = \frac{IM}{2}$.

Démonstration. Pour tout M dans $\mathcal{E}$, on a

$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \iff \langle \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \rangle = 0$$

Comme $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, cette condition devient $MI^2 = IA^2$, d'où le résultat. □

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espace affines de $\mathcal{E}$, de directions respectives F et G. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux si on a $u \perp v$ pour tout $u \in F$ et $v \in G$.

Vérifiez que vous savez définir le vocabulaire de géométrie élémentaire : triangle rectangle, isocèle, équilatéral, rectangle, losange, carré.

Proposition. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines orthogonaux. Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est soit vide, soit un singleton.*

Démonstration. Soient A et B dans $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors $\overrightarrow{AB} \in F \cap G$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, d'où le résultat. □

Proposition. *Soient $A \neq B$ deux points de $\mathcal{E}$. L'ensemble des $M \in \mathcal{E}$ tels que $AM = BM$ est un hyperplan affine appelé hyperplan médiateur de $[AB]$. C'est l'hyperplan de direction $\overrightarrow{AB}^{\perp}$ passant par le milieu de $[AB]$*

Démonstration. Soit I le milieu de $[AB]$; on a $I \neq A$. Soit $M \in \mathcal{E}$. Écrivons $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$. On a alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} = (\lambda + \frac{1}{2})\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM} = (\lambda - \frac{1}{2})\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$, et on a $AM = BM$ ssi $\lambda = 0$. □

Fin cours # 7 du 3 avril

<u>Théorème</u> : Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ application tq $\forall M, N \in \mathcal{E}$, $f(M)f(N) = MN$

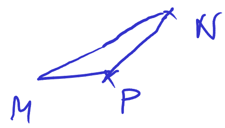
$\left(\Leftrightarrow \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|\right)$

(isométrie). ALORS f <u>affine</u>.

<u>démo</u>. il suffit de montrer que : Soient $M \neq N$

$\forall \; 0 < \lambda < 1$, $f(\lambda M + (1-\lambda)N) = \lambda f(M) + (1-\lambda) f(N)$.

Posons $P = \lambda M + (1-\lambda)N$



$$(*) \begin{cases} \overrightarrow{MP} = (1-\lambda)\overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{PN} = \lambda \overrightarrow{MN} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(M)f(P)} + \overrightarrow{f(P)f(N)}$$

$$\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\| = \lambda\|\overrightarrow{MN}\| + (1-\lambda)\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{MP}\| + \|\overrightarrow{PN}\|$$

donc $\|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}\| = \|\overrightarrow{MP}\| + \|\overrightarrow{PN}\| \Rightarrow \exists\, s \geq 0, \overrightarrow{MP} = s\overrightarrow{PN}$

$(*) \Rightarrow \quad (1-\lambda)\overrightarrow{MN} = s\lambda\overrightarrow{MN} \Rightarrow \boxed{s\lambda = (1-\lambda)} \Rightarrow s = \frac{1}{\lambda} - 1$

de même

$$\overrightarrow{f(M)f(P)} = s \, \overrightarrow{f(P)f(N)}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda \overrightarrow{f(M)f(P)} = (1-\lambda)\overrightarrow{f(P)f(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(P)f(N)}$$

$$\Rightarrow \quad f(P) + \lambda \overrightarrow{f(M)f(N)} = f(N)$$

$$\Rightarrow \quad f(P) = f(N) - \lambda \overrightarrow{f(M)f(N)}$$

$$= \lambda\Big(\underbrace{f(N) - \overrightarrow{f(M)f(N)}}_{f(M)}\Big) + (1-\lambda) f(N)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(P) = \lambda f(M) + (1-\lambda) f(N)}$$

donc f affine.

$\square$