Exercice 17. 1. Dans $\mathbb{R}^2$, soient $A = (1, 1)$ et $B = (2, 1)$. Donner une équation cartésienne de la droite passant par ces points.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $A = (1, 2, -3)$, $B = (4, -5, -2)$ et $C = (3, -2, -3)$. Donner une équation du plan contenant ces trois points.

1) $M(x,y) \in (AB) \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\iff y = 1$.

2) $M(x,y,z) \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$

$\iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

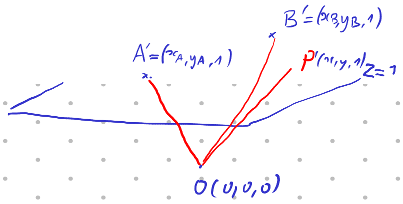
$\iff \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 2 \\ y-2 & -7 & -4 \\ z+3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\iff 4(x-1) + 2(y-2) + 2(z+3) = 0$

$\iff \boxed{4x + 2y + 2z - 2 = 0.}$

Exercice 18. Soit $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $P = (x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0 \ .$$



P, A, B alignés $\iff \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OP'}$ liés

ou bien : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y - y_A \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} x_B - x_A & x - x_A \\ y_B - y_A & y - y_A \end{vmatrix} = 0$

$\iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) = 0.$

Barycentres

Proposition.

Soient A, B, C affinement indépendants

Soient $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ x & y & z \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} A & B & C \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$, $M''\begin{pmatrix} A & B & C \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}$

(coordonnées barycentriques)

ALORS M, M', M'' alignés $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0$

démo. On peut supposer $x+y+z = x'+y'+z' = x''+y''+z'' = 1$

$x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{BM} + z\overrightarrow{CM} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\underline{x\overrightarrow{AM}} + y\overrightarrow{BA} + \underline{y\overrightarrow{AM}} + z\overrightarrow{CA} + \underbrace{z\overrightarrow{AM}}_{=0}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$

de même $\overrightarrow{AM'} = y'\overrightarrow{AB} + z'\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM''} = y''\overrightarrow{AB} + z''\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AM} = (y'-y)\overrightarrow{AB} + (z'-z)\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MM''} = (y''-y)\overrightarrow{AB} + (z''-z)\overrightarrow{AC}$

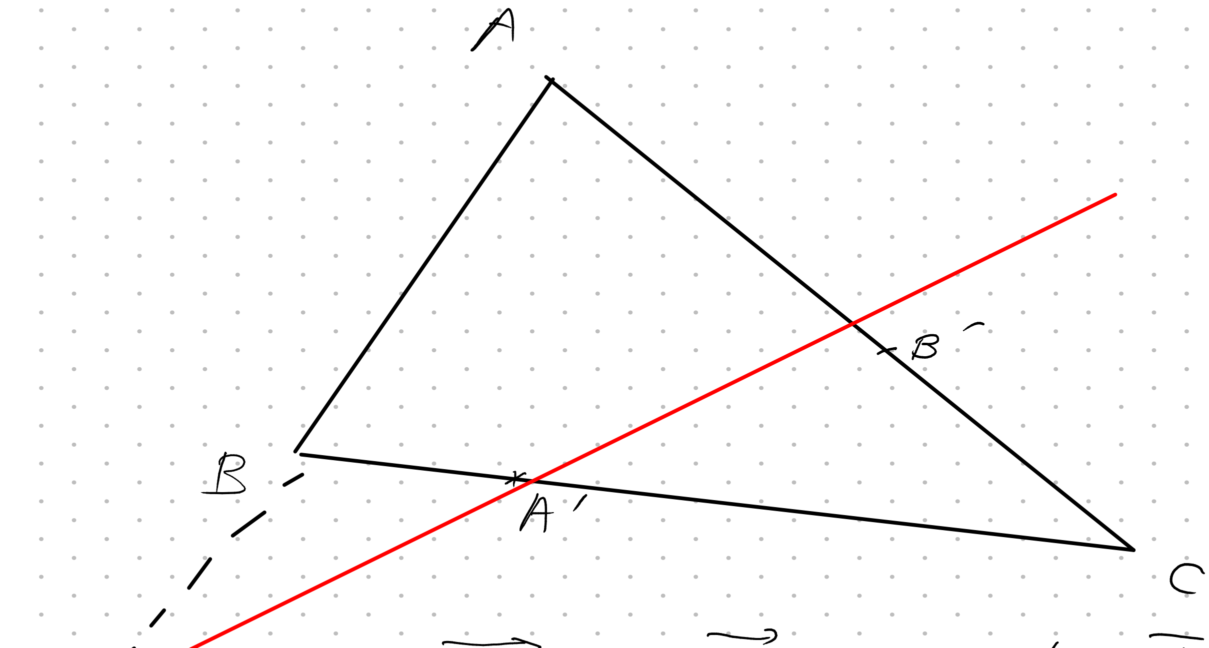
M, M', M'' alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}$ liés

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y'-y & y''-y \\ z'-z & z''-z \end{vmatrix} = 0$

Or $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & y'-y & y''-y \\ z & z'-z & z''-z \end{vmatrix} = 0$

Exercice 14 (Théorème de Ménélaüs)**.** Soient A, B, C trois points affinement indépendants d'un espace affine. Soit $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ trois points, distincts de A, B, C. Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1. \iff \alpha'\beta'\gamma' = 1$$



(1) $\overrightarrow{A'B} = \alpha' \overrightarrow{A'C}$ $\qquad \alpha' = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$

(2) $\overrightarrow{B'C} = \beta' \overrightarrow{B'A}$ $\qquad \beta' = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$

(3) $\overrightarrow{C'A} = \gamma' \overrightarrow{C'B}$ $\qquad \gamma' = \dfrac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$

$$(1) \iff A' = \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha' \end{pmatrix}$$

Coordonnées barycentriques

$$(2) \iff B' = \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \begin{pmatrix} -\beta' & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

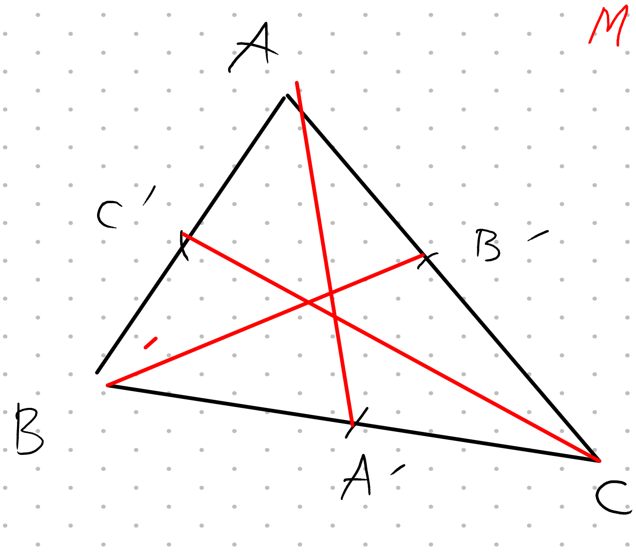
$$(3) \iff C' = \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma' & 0 \end{pmatrix}$$

A', B', C' alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & -\beta' & 1 \\ 1 & 0 & -\gamma' \\ -\alpha' & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \alpha'\beta'\gamma' = 0.$

Exercice 15 (Théorème de Céva)**.** Soient A, B, C trois points affinement indépendants d'un espace affine. Soit $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ trois points, distincts de A, B, C. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\underbrace{\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}}_{\alpha'}\underbrace{\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}}_{\beta'}\underbrace{\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}}_{\gamma'} = -1.$$



$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ x & y & z \end{pmatrix} \in (AA')$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -\alpha' & z \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow z + \alpha' y = 0$

$\Leftrightarrow z = -\alpha' y$

de même $M \in (BB') \Leftrightarrow x = -\beta' z$

$M \in (CC') \Leftrightarrow y = -\gamma' x$

Si $M \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')$ et si par ex $x \neq 0$:

$x = -\beta' z$
$= \alpha'\beta' y$
$= -\alpha'\beta'\gamma' x$

$\Rightarrow \alpha'\beta'\gamma' = -1$