Chapitre 1

Géométrie affine

On travaille sur un corps $\mathbf{K}$. Dans la plupart des cas, ce sera $\mathbf{R}$ mais on pourra parfois considérer d'autres corps comme $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$ ou les corps finis. Tous les espaces vectoriels considérés seront sur le corps $\mathbf{K}$ et de dimension finie.

1.1 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Avant de définir les espaces affines abstraits, revenons sur le cas plus concret des sous-espaces affines d'un espace vectoriel. Soit E un espace vectoriel. Pour tout x dans E, la translation de vecteur x est l'application $\tau_x : E \to E$ définie par $y \mapsto x + y$. L'application τ_x est bijective et $\tau_x^{-1} = \tau_{-x}$. Elle est linéaire uniquement dans le cas $x = 0$. On a de plus $\tau_x \circ \tau_y = \tau_{x+y}$: l'ensemble des translations forme un groupe isomorphe à $(E, +)$.

On dit qu'une partie $\mathcal{F} \subset E$ est un *sous-espace affine* (s.e.a.) s'il existe $x \in E$ et un sous-espace vectoriel $F \subset E$ tels que

$$\mathcal{F} = \tau_x(F) = x + F = \{x + y \ : \ y \in F\}.$$

Dans ce cas, on a nécessairement $x \in \mathcal{F}$ puisque $0 \in F$. Si x_1 et x_2 sont dans $\mathcal{F}$, alors $x_1 - x_2 \in F$: on retrouve F comme l'ensemble des différences entre éléments de $\mathcal{F}$. En particulier, le sous-espace vectoriel F est unique. On dit que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de direction F passant par x. Bien sûr, x n'est pas uniquement déterminé par cette condition : pour tout x' dans $\mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} = x' + F$.

Un sous-espace vectoriel $E \subset V$ est stable par combinaisons linéaires : pour des familles finies $(x_i)_{i \in I}$ dans E et $(\lambda_i)_{i \in I}$ dans $\mathbf{K}$ on a

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in E$$

(cela se démontre par récurrence sur $|I|$; pour $|I| = 2$ c'est la définition de sous-espace vectoriel). Les combinaisons linéaires permettent d'expliciter la notion d'espace vectoriel engendré : si (E_i) est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de V, leur intersection $\bigcap E_i$ est aussi un sous-espace vectoriel. On peut donc définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie $A \subset V$, noté $\mathrm{Vect}(A)$, comme l'intersection de la famille de tous les sous-espaces vectoriels contenant A. On peut aussi l'écrire comme

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \ : \ I \text{ fini }, \lambda_i \in \mathbf{K}, x_i \in A \right\}$$

Définition. Un espace affine est un ensemble $\mathcal{E}$ avec une action d'un espace vectoriel $(E,+)$: $E \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

$$\vec{u}, x \longmapsto x + \vec{u}$$

tq action $\begin{cases} 1)\ x + \vec{0} = x \quad (\forall x \in \mathcal{E}) \\ 2)\ (x+\vec{u}) + \vec{v} = x + (\vec{u}+\vec{v}) \quad (\forall x \in \mathcal{E}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E) \end{cases}$

simplement transitive $\{ 3)\ \forall x, y \in \mathcal{E},\ \exists!\ \vec{u} \in E,\ x + \vec{u} = y$

Notation : $\vec{u} = \overrightarrow{xy}$

ex. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^m = E$ avec : $E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

$\vec{u}, x \longmapsto x + \vec{u}$ (addition usuelle)

dans ce cas $\overrightarrow{xy} = y - x$.

Relation de Chasles : $\forall x, y, z \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$

(condition 2))

(car $x + (\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}) = (x + \overrightarrow{xy}) + \overrightarrow{yz} = y + \overrightarrow{yz} = z = x + \overrightarrow{xz}$)

Remarque. Si $F \leqslant \mathbb{R}^n$, si $x \in \mathbb{R}^n$, alors $x + F = \{x + y : y \in F\}$ est un espace affine

Notation : $E = \overrightarrow{\mathcal{E}}$

$\mathcal{F} = x + F$, $\overrightarrow{\mathcal{F}} = F$

(Barycentres)

Définition équivalente pour un espace affine.

$\mathcal{E}$, E et $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$ tq

ensemble $\mathbb{R}$-espace vectoriel $A, B \mapsto \overrightarrow{AB}$

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ $(\forall A, B, C \in \mathcal{E})$

2) $\forall A \in \mathcal{E}$, $\forall \vec{u} \in E$ $\exists! B$, $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

puisque le membre de droite forme un sous-espace vectoriel qui est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A.

De la même manière, on peut définir le sous-espace affine engendré par une partie $A \subset V$. On pourrait rester dans le cadre "concret" des sous-espaces affines d'un espace vectoriel, mais pour des applications ultérieures il est utile de disposer d'une notion abstraite d'espace affine.

1.2 Espaces affines abstraits

Dans l'exemple d'un sous-espace affine $\mathcal{F} = x + F \subset E$ du paragraphe précédent, les points (les éléments du sous-espace affine $\mathcal{F}$) et les vecteurs (les éléments du sous-espace vectoriel F) sont tous deux inclus dans E. Dans la définition d'un espace affine abstrait, ce n'est pas le cas ; il n'est pas possible de définir $2M$ où $M + N$ pour des points M, N de $\mathcal{F}$.

[faire un dessin]

Rappelons le vocabulaire des actions de groupes. Une action d'un groupe G (d'élément neutre e) sur un ensemble X est la donnée d'une fonction $\mu : G \times X$ dans X qui vérifie les axiomes $\mu(e, x) = x$ et $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$ pour tous g, h dans G et $x \in X$. Il est habituel d'écrire $g \cdot x$ plutôt que $\mu(g, x)$, voire $x + g$ lorsque le groupe G est abélien.

On dit qu'une action est *simplement transitive* si pour tous x, y dans X, il existe un unique $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Autrement dit, pour tout x dans X, l'application $g \mapsto g \cdot x$ est une bijection de G sur X.

Définition. On appelle *espace affine* la donnée d'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide et d'une action simplement transitive de $(E, +)$ sur $\mathcal{E}$, où E est un espace vectoriel. On dit que E est la direction de $\mathcal{E}$. On appelle dimension de $\mathcal{E}$ la dimension de E. On appelle droite affine un espace affine de dimension 1, plan affine un espace affine de dimension 2.

Dans ce contexte, le éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés les points et sont habituellement notés par des lettres majuscules $A, B, C, M, \ldots$. Les éléments de E sont appelées les vecteurs et habituellement notés par des symboles comme $\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}$. L'action est notée additivement : $A + \overrightarrow{u}$ est un point.

Exemple. L'action de $(V, +)$ sur V par translation $\mu(x, y) = x + y$ est simplement transitive (comme pour tout groupe) : tout espace vectoriel peut donc être vu comme un espace affine.

Étant donnés deux points A et B de $\mathcal{E}$, on note $\overrightarrow{AB}$ l'unique élément de E tel que $A + \overrightarrow{AB} = B$. L'axiome d'action de groupe donne immédiatement la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

On a également $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Un espace affine est un espace vectoriel qui a oublié son origine. On a vu que tout espace vectoriel peut naturellement être vu comme un espace affine. Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est un espace affine d'espace directeur E, tout choix d'un point $O \in \mathcal{E}$ induit une bijection $\mathcal{E} \to E$

$$M \to \overrightarrow{OM}$$

On peut via cette bijection munir $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace vectoriel (le «vectorialisé en O»), dans lequel le zéro est O, mais ce choix n'est pas canonique. Dans les preuves, on commence souvent par choisir une origine O pour remplacer tous les points M par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$.

On appelle *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ l'orbite d'un sous-espace vectoriel de E, c'est à dire un sous-ensemble de la forme

$$\mathcal{F} = \{M + \overrightarrow{u} \ : \ \overrightarrow{u} \in F\}$$

où $M \in \mathcal{E}$ et F un sous-espace vectoriel de E. On a alors

$$F = \{\overrightarrow{AB} \ : \ A, B \in \mathcal{F}\}$$

et même pour tout choix de $O \in \mathcal{F}$

$$F = \{\overrightarrow{OM} \ : \ M \in \mathcal{F}\}.$$

En particulier, le sous-espace vectoriel F est unique, on l'appelle la direction de $\mathcal{F}$. On dit que deux sous-espaces affines sont parallèles s'ils ont même direction (en particulier, cette définition impose qu'ils ont même dimension : une droite ne peut pas être parallèle à un plan). Dans le cas d'un espace vectoriel vu comme espace affine, on retrouve la définition précédente. On dira aussi qu'un sous-espace affine $\mathcal{E}_1$ (de direction E_1) est *faiblement parallèle* à un sous-espace affine $\mathcal{E}_2$ (de direction E_2) si $E_1 \subset E_2$.

Exercice. Soient A, B, C, D quatre points d'un espace affine. Vérifier que l'on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Dans ce cas, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice. Dans un espace affine, montrer que deux hyperplans affines disjoints sont parallèles.

Exercice. Soient $\mathcal{E}_1 = A_1 + E_1$ et $\mathcal{E}_2 = A_2 + E_2$ deux sous-espaces affines. Montrer qu'ils ont un point en commun si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1 + E_2$. Montrer qu'ils sont égaux si et seulement si $E_1 = E_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1$.

Exercice. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine sur le corps $\{0, 1\}$. Quel est le cardinal de $\mathcal{E}$? Combien contient-il de droites affines ? Faire un dessin. Quelles droites sont parallèles ?

1.3 Barycentres

Proposition. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient $A_1, \ldots, A_m$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ dans $\mathbf{K}$ tels que $s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \neq 0$. Il existe un unique point B de $\mathcal{E}$ tel que*

$\mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \overrightarrow{0}. \qquad (\text{dans } \overrightarrow{\mathcal{E}}) \tag{1.1}$$

Ce point B est appelé *barycentre* du système pondéré $((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_m, \lambda_m))$ et noté

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_m \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

ou parfois $\mathrm{bar}((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_m, \lambda_m))$.

Exercice. Montrer que si la fonction de $\mathcal{E}$ dans E donnée par $B \mapsto \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$ est bijective si $s \neq 0$ et constante si $s = 0$.

Par exemple, étant donnés deux points A et B de $\mathcal{E}$, on appelle milieu de A, B le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$. C'est le point M défini par la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$, où encore $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

démo. Soit $O \in \mathcal{E}$ quelconque

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_i}\right) = \vec{0}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BO} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$$

$$\iff \boxed{\overrightarrow{OB} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}}$$

donc $B = O + \vec{u}$ où $\vec{u} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.

Propriétés : ASSOCIATIVITÉ.

Si $B = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_m \\ \lambda_1 & & \lambda_m \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_m & A'_1 & \cdots & A'_n \\ \lambda_1 & & \lambda_m & \mu_1 & & \mu_n \end{pmatrix}$

avec $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \neq 0$

alors $C = \begin{pmatrix} B & A'_1 & \cdots & A'_n \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i & \mu_1 & & \mu_n \end{pmatrix}$

Démonstration. Fixons un point $O \in \mathcal{E}$. Pour tout $B \in \mathcal{E}$, on a

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_i}) = s\overrightarrow{BO} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

La condition (1.1) est donc satisfaite si et seulement si

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i},$$

ce qui est le cas pour un unique $B \in \mathcal{E}$. □

Remarquons que si $A_1, \ldots, A_m$ appartiennent à un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, c'est aussi le cas de leur barycentre.

Par exemple, étant donné deux points A et B de $\mathcal{E}$, on appelle milieu du segment AB le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$. C'est le point M défini par la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

Quand tous les poids sont égaux 1, on parle d'isobarycentre. Il faut faire attention quand on travaille avec des corps de caractéristique non nulle : par exemple, en caractéristique 2, un segment n'a pas de milieu...

On peut vérifier les propriétés suivantes des barycentres.

— Pour tout $\alpha \neq 0$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \alpha\lambda_1 & \alpha\lambda_2 & \ldots & \alpha\lambda_n \end{pmatrix}$$

On peut ainsi se ramener au cas $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

— Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & A_{\sigma(2)} & \ldots & A_{\sigma(n)} \\ \lambda_{\sigma(1)} & \lambda_{\sigma(2)} & \ldots & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

— On peut retirer les points de poids nuls

$$\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_{n-1} & A_n \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_{n-1} \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

— On peut regrouper les points identiques

$$\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & B & B \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & B \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \mu + \nu \end{pmatrix}$$

— On a la propriété d'associativité : si $m < n$ et si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m \neq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & A_{m+1} & \ldots & A_n \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_m & \lambda_{m+1} & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

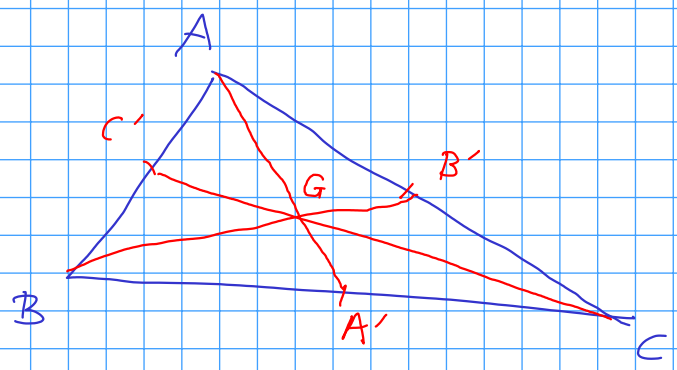
où $H = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_m \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}$.

Dans le cas d'un sous-espace affine d'un espace vectoriel, la notion de barycentre peut s'écrire à l'aide de la structure vectorielle : si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

ex : $A, B, C \in \mathbb{R}^2$

$$A' = \begin{pmatrix} B & C \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} A & C \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$(AA') = A + \mathbb{R}\overrightarrow{AA'}, \ldots$$

$$(AA') \cap (BB') \cap (CC') = \{G\}$$

où $G = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

démo. $G = \begin{pmatrix} A & A' \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & B' \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & C' \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow G \in (AA'), G \in (BB'), G \in (CC')$.