5.2 Principe des zéros isolés

Commençons par montrer le résultat préliminaire suivant.

Proposition 5.4. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et $a \in \Omega$. Si f et toutes ses dérivées s'annulent en a (i.e. $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$), alors f est identiquement nulle.*

Définissons maintenant l'ordre d'un zéro de f.

Définition 5.5. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω et $a \in \Omega$ un zéro de f. L'ordre de a en tant que zéro de f, ou sa multiplicité, est l'ordre de la première dérivée non nulle de f en a. Si toutes les dérivées s'annulent en a, l'ordre est dit infini.*

L'ordre de a en tant que zéro de f est donc l'entier m caractérisé par la propriété suivante :

$$f(a) = f'(a) = \dots f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Fin du cours du 20/02/2023.

Par la proposition 5.4, les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sont tous d'ordre fini. Nous pouvons montrer aisément le résultat de factorisation suivant.

Proposition 5.6 (Factorisation)**.** *Soit Ω un ouvert, f une fonction holomorphe sur Ω. On a que a est un zéro d'ordre m si et seulement s'il existe une fonction g holomorphe sur Ω telle que $g(a) \neq 0$ et $f(z) = (z-a)^m g(z)$.*

Voici maintenant le principe des zéros isolés.

Théorème 5.7 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur Ω. Alors les zéros de f sont isolés.*

Ainsi, une suite injective de zéros de d'une fonction holomorphe non identiquement nulle peut s'accumuler ou bien à l'infini ou bien sur le bord de Ω mais jamais à l'intérieur. Exemples : les zéros de la fonction $e^z - 1$ tendent vers l'infini, ceux de $e^{\frac{1}{z}} - 1$ tendent vers 0 qui n'est pas dans le domaine de définition de la fonction.

Le principe des zéros isolés porte parfois le nom de principe de prolongement analytique car il permet de montrer le résultat suivant.

Proposition 5.8 (Principe du prolongement analytique)**.** *Soit Ω un ouvert connexe et f, g deux fonctions holomorphes. On suppose qu'il existe une suite injective z_n qui converge vers un point de Ω et telle que $f(z_n) = g(z_n)$ pour tout n. Alors $f \equiv g$.*

Ainsi, il suffit de connaître les valeurs d'une fonction holomorphe sur une telle suite pour connaître les valeurs sur tout l'ouvert Ω, c'est-à-dire la prolonger à Ω.

en effet si $\lim z_n = z \in \Omega$ alors $f(z) = g(z)$ et si $f \neq g$, z zéro isolé de $f-g$ c-à-d $\exists k \geq 1$ et h holomorphe sur $D(z,r) \subset \Omega$ $(r>0)$ tq $\forall\, |x-z|<r$, $(f-g)(x) = (x-z)^k h(x)$ et $h(z) \neq 0$. En particulier $h(z_n) \neq 0$ si $n \gg 0$
$\Rightarrow (f-g)(z_n) = \underbrace{(z_n-z)^k}_{\neq 0} h(z_n) \neq 0$ CONTRADICTION

5.3 Principe du maximum

En général, la valeur absolue d'une fonction holomorphe ne peut pas avoir de maximum local à l'intérieur du domaine de définition.

Théorème 5.9 (principe du maximum)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω. Si $|f|$ admet un maximum local en un point de Ω, alors f est constante.*

Soit f une fonction holomorphe qui n'est pas constante et z_n une suite telle que $|f(z_n)| \to \sup_{\Omega} |f(z)|$. Si z_n est non bornée, alors il existe une sous-suite z_{n_k} qui tend vers l'infini. Le sup de $|f|$ s'obtient dans ce cas à l'infini. Si z_n est bornée, alors il existe une sous-suite z_{n_k} qui converge vers un élément a. Comme f n'est pas constante, $a \notin \Omega$. Donc $a \in \overline{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$. Dans ce cas, le sup de $|f|$ s'obtient sur le bord. On peut ainsi dire de manière un peu formelle (car on ne sait si f a une trace au bord ou une limite à l'infini) que $|f|$ admet son sup à l'infini ou sur le bord de l'ouvert de définition. Voici maintenant un énoncé rigoureux.

démo du principe du maximum.

Supposons $|f|$ a un maximum local en $0 \in \Omega$

c-à-d : $\exists r>0, \forall |z| \leq r$, $z \in \Omega$ et $|f(z)| \leq |f(0)|$

Alors $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \leq |f(0)|^2$ $(*)$

or $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(\forall |z| \leq r)$

pour une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$|f(re^{it})|^2 = f(re^{it})\overline{f(re^{it})}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k}\, r^k e^{-ikt}$$

$$= \sum_{k,n \geq 0} a_n \overline{a_k}\, r^{n+k} e^{i(n-k)t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{k,n\geq 0} a_n \overline{a_k}\, r^{n+k} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t} dt}_{=0 \text{ si } n \neq k}$$

$$\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}$$

donc $(*) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq |f(0)|^2 = |a_0|^2$

$\Rightarrow \forall n > 0, \ a_n = 0$

$\Rightarrow \forall |z| \leq r, \ f(z) = a_0 \Rightarrow$ $\underline{f = a_0 \text{ sur } \Omega}$

Proposition 5.10. *Soit Ω un ouvert borné, f une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Alors*
(connexe)

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|.$$

$\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$

démo : $\sup_{z\in\Omega} |f(z)| = \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$ car $\overline{\Omega}$ compact $= |f(z_0)|$ pour un $z_0 \in \overline{\Omega}$
principe du max, si $z_0 \in \Omega$ alors f constante

6 Singularités et résidus

6.1 Séries de Laurent

Les séries de Laurent jouent le rôle de série entière pour les fonctions qui sont définies sur des couronnes circulaires. Définissons d'abord ce que c'est une série de Laurent.

Définition 6.1. *Une série de Laurent est une série de la forme*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

Une série de Laurent est dite convergente si les deux séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^n$$

convergent. La somme de la série de Laurent est la somme de ces deux séries.

Les fonctions définies sur des couronnes circulaires admettent des développements en série de Laurent. Montrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 6.2. *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne circulaire $C(a, r_1, r_2) = \{z \; ; \; r_1 < |z-a| < r_2\}$ où $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$. Pour $r \in]r_1, r_2[$, l'intégrale $\int\limits_{C(a,r)} f(z)\,dz$ ne dépend pas de r.*

Nous avons le résultat suivant sur l'existence du développement en série de Laurent.

Théorème 6.3 (Développement en série de Laurent)**.** *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne circulaire $C(a, r_1, r_2) = \{z \; ; \; r_1 < |z-a| < r_2\}$ où $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$. Il existe une série de Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ qui converge sur la couronne $C(a, r_1, r_2)$ et dont la somme vaut $f(z)$:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$

De plus, les coefficients a_n sont uniquement déterminés par la formule

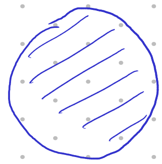
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

où $r \in]r_1, r_2[$ est arbitraire. En particulier, l'intégrale au-dessus ne dépend pas de r. Enfin, la série de Laurent converge uniformément sur tout compact de la couronne $C(a, r_1, r_2)$.

Sur une couronne donnée, le développement en série de Laurent est uniquement déterminé car on connaît la formule des coefficients a_n. Par contre, sur des couronnes différentes on peut avoir des développements en série de Laurent différents pour la même fonction. Exemple avec $\frac{1}{z^2-z}$ sur les couronnes $C(0, 0, 1)$ et $C(0, 1, \infty)$. Cependant, sur deux couronnes de même centre et non-disjointes le développement en série de Laurent est le même.

Application.

Soit $D = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$



Lemme de Schwarz : Soit $f : D \longrightarrow D$ biholomorphisme (D)

(f holomorphe, bijective et f^{-1} holomorphe)

Si $f(0) = 0$ ALORS $\exists\, |\lambda| = 1, \forall z \in D, f(z) = \lambda z$.

démo. Posons $\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$

Alors $\varphi \in \mathcal{O}(D)$.

[en effet, f analytique : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ série de rayon ≥ 1

avec $a_0 = 0 = f(0)$

$\Rightarrow \varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \quad (\forall z \in D)$]

Soit $0 < r < 1$

$$\sup_{|z| \leq r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| \quad \text{(Principe du max)}$$

$$= \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r} \quad \text{car } f(D) \subset D \quad \Rightarrow \sup_D |\varphi| \leq 1$$

$\Rightarrow |\varphi(0)| = |f'(0)| \leq \frac{1}{r} \quad (\forall\, 0 < r < 1)$

$\Rightarrow \boxed{|\varphi(0)| \leq 1}$. Donc $|f'(0)| \leq 1$

De même : $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$

$\qquad\qquad\qquad$ ‖

$\qquad\qquad |1/f'(0)|$

$\Rightarrow |f'(0)| = 1$

Donc $\sup_{z \in D} |\varphi(z)| = |\varphi(0)| = 1$ Comme $0 \in D$, $\varphi \equiv \varphi(0) = \lambda$

$\Rightarrow \forall z \in D, f(z) = \lambda z$ □

Théorème $\mathrm{Aut}_{hol}(D) = \{f : D \to D \text{ biholomorphe}\}$

$$= \left\{ h_{\theta,a} : \begin{array}{l} D \to D \\ z \mapsto e^{i\theta}\dfrac{(a-z)}{1-\bar{a}z} \end{array} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R}, |a|<1 \right\}$$

démo. Si $\theta \in \mathbb{R}$ et $|a|<1$, alors

$h_{\theta,a} : D \to \mathbb{C}$ holomorphe car $\left|\frac{1}{\bar{a}}\right| > 1$

$$\sup_D |h_{\theta,a}| = \max_{|z|=1} |h_{\theta,a}(z)|$$

Or si $z = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$|h_{\theta,a}(z)| = \left| e^{i\theta} \frac{a - e^{i\alpha}}{1 - \bar{a}e^{i\alpha}} \right| = \left| e^{-i\alpha} \frac{a - e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha} - \bar{a}} \right| = 1$$

Donc $\forall z \in D$, $|h_{\theta,a}(z)| \leqslant 1$

Comme $h_{\theta,a}$ non constante, principe du max

$\Rightarrow \forall z \in D, |h_{\theta,a}(z)| < 1$.

donc $h_{\theta,a}(D) \subset D$.

De plus, $h_{\theta,a}(z) = z' \Leftrightarrow e^{i\theta}(a-z) = (1-\bar{a}z)z'$

$$\Leftrightarrow z' = e^{-i\theta} \frac{\bar{a}e^{-i\theta} - z}{1 - ae^{i\theta}z} = h_{-\theta,\bar{a}e^{-i\theta}}(z)$$

Donc biholomorphisme.

Soit $f : D \to D$ biholomorphe

$f(0) = a \in D \Rightarrow h_{0,a} \circ f : \begin{array}{l} D \to D \\ 0 \mapsto 0 \end{array}$

Donc $f = h_{0,a}^{-1} \circ h_{-\lambda,0}$

$= h_{\theta,b}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ et $|\theta| < 1$

$\Rightarrow$ (Lemme de Schwartz) $h_{0,a} \circ f(z) = \lambda z$ pour un $|\lambda| = 1$