4.2 Indice d'un point par rapport à un lacet

Définition 4.3. *Soit γ un lacet et $z_0 \notin \gamma$. On définit l'indice du point z_0 par rapport à la courbe γ :*

$$\operatorname{Ind}(z_0, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz.$$

Voici quelques propriétés de l'indice.

Proposition 4.4. *Soit γ un lacet et $z_0 \notin \gamma$.*

a) L'indice est toujours entier : $\operatorname{Ind}(z_0, \gamma) \in \mathbb{Z}$.

b) L'indice est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

c) L'indice est nul sur la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Formule géométrique pour l'indice. Nous avons l'interprétation géométrique suivante de l'indice. L'indice est le nombre de tours que l'on fait autour de z_0 lorsqu'on parcourt complètement la courbe (les tours dans le sens direct comptent pour $+1$, ceux dans le sens rétrograde comptent pour -1). Dans le cas d'une courbe d'allure compliquée, il est utile de procéder de la manière suivante. On trace une demi-droite arbitraire d'origine z_0. Pour chaque intersection de la demi-droite avec la courbe on compte $+1$ si la courbe croise la demi-droite dans le sens direct et -1 sinon (le sens direct ou rétrograde est défini par rapport à z_0, c'est-à-dire en supposant que l'origine est en 0). On fait la somme et le résultat est l'indice de z_0.

Remarquons enfin que dans le cas d'un lacet simple, l'indice à l'intérieur de la courbe est ± 1, suivant que la courbe est parcourue dans le sens direct ou pas.

Définition 4.5. *Un lacet simple est dit orienté dans le sens direct si l'indice d'un point situé à l'intérieur du lacet est égal à 1.*

4.3 Théorème et formules de Cauchy. Applications

Définition 4.6. *Un ouvert Ω est dit étoilé s'il existe $a \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ nous avons que tout le segment fermé $[a, z]$ est inclus dans Ω.*

Le but de cette partie est de montrer le théorème de Cauchy suivant.

Théorème 4.7 (Cauchy)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

En fait, on peut se passer de l'hypothèse que Ω est étoilé. Il suffit de supposer que f est holomorphe à l'intérieur du lacet γ.

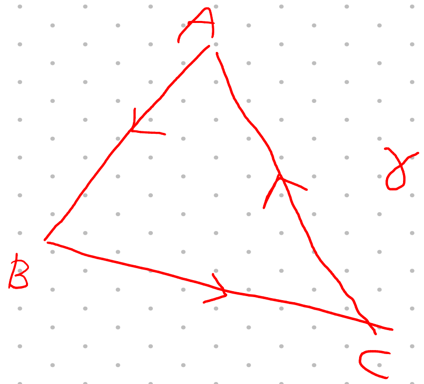
Pour montrer ce théorème, on considére d'abord le cas d'un triangle.

Théorème 4.8 (Goursat)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\triangle$ un triangle inclus (avec son intérieur) dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω ~~sauf éventuellement en un point où elle est continue~~. Alors*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0.$$

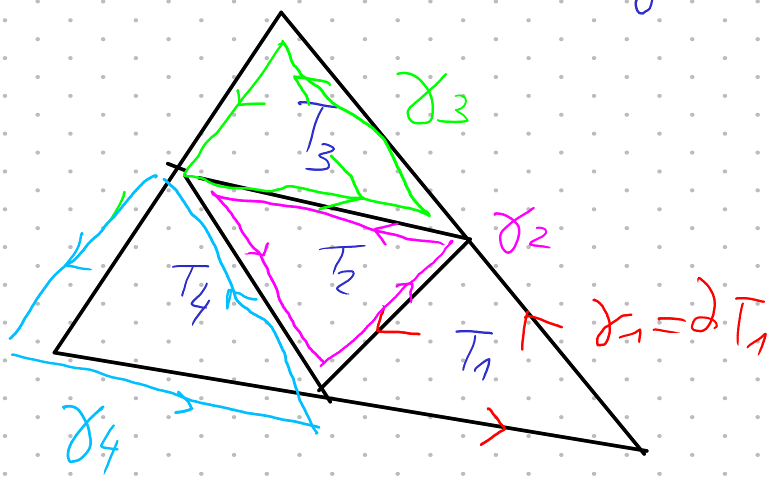
Fin du cours du 30/01/2023.

Voici maintenant une version légèrement améliorée du théorème de Cauchy.



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

démo. $I = \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f$



$$\operatorname{diam} T = \sup_{a,b \in T} |a-b|$$

$\Delta : T \subset \Omega$

$\exists\, 1 \leq i \leq 4, \quad \left|\int_{\gamma_i} f\right| \geq \frac{|I|}{4}$

Par récurrence on construit des triangles

$$T = T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots$$

où $\forall k \geq 1, \quad \left|\int_{\partial T_k} f\right| \geq \frac{|I|}{4^k} \qquad \gamma_k = \partial T_k$

et $\quad \operatorname{diam}(T_k) = \frac{\operatorname{diam} T}{2^k}, \quad L(\gamma_k) = \frac{L(\gamma)}{2^k}$

Par compacité : $\exists z_0 \in \bigcap_{k=0}^{\infty} T_k$

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0) + o(z-z_0)$$

Soit $\varepsilon > 0$, Soit $\eta > 0$ tq

$\forall\ |z-z_0| < \eta \quad |f(z) - f(z_0) - (z-z_0) f'(z_0)| \leq \varepsilon |z-z_0|$

Pour $k \gg 0$, $\operatorname{diam} T_k < \eta$

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma_k} f\right| = \underbrace{\left|\int_{\gamma} (f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0))\, dz\right|}_{0} + \cdots$$

$$\leq L(\gamma_k)\, \varepsilon \operatorname{diam} T_k = \frac{L(\gamma) \operatorname{diam} T\, \varepsilon}{4^k}$$

Or $\quad \dfrac{|I|}{4^k} \leq \left|\int_{\gamma_k} f\right| \leq \dfrac{\operatorname{diam} T\, L(\gamma)\, \varepsilon}{4^k}$

$\Rightarrow |I| \leq \varepsilon . \qquad (\forall \varepsilon > 0)$

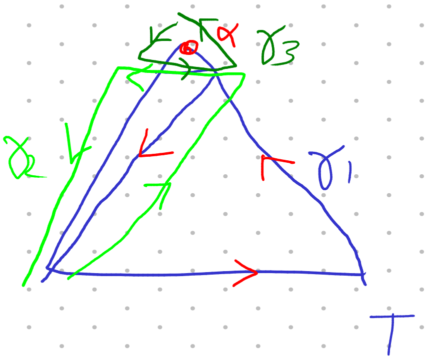
$\Rightarrow I = 0 .$

Gourat généralisé :

$$\int_{\partial T} f = 0 \quad \text{si} \quad f \text{ holomorphe sur } \Omega \setminus \{\alpha\}$$
$$\text{et } f \text{ continue sur } \Omega$$

(pour un $\alpha \in \Omega$)

démo : cas où α = sommet



$$\int_{\partial T} f = \underbrace{\int_{\gamma_1} f}_{=0} + \underbrace{\int_{\gamma_2} f}_{=0} + \underbrace{\int_{\gamma_3} f}_{\to 0}$$

$L(\gamma_3) \to 0$

$= 0$

cas où $\alpha \in \mathring{T}$

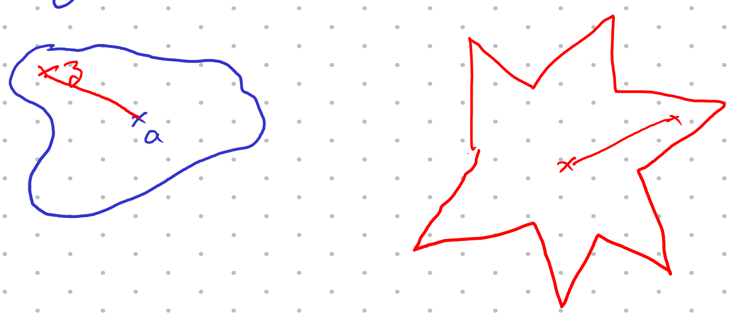
$$\int_{\partial T} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f$$

$= 0$

d'après le cas précédent.

définition : Ω étoilé s'il existe $a \in \Omega$ tq

$\forall z \in \Omega, \ [a, z] \subset \Omega$



Théorème 4.9 (Cauchy bis)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω sauf éventuellement en un point où elle est continue. Alors*

a) f admet un primitive sur Ω.

b) Nous avons que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \quad = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

Nous obtenons comme corollaire la formule de Cauchy :

Théorème 4.10 (formule de Cauchy)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Pour tout $z \in \Omega \setminus \gamma$ nous avons que*

dérivation sous $\int$

$$f(z)\,\mathrm{Ind}(z,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du. \implies f'(z)\,\mathrm{Ind}(z,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^2}\,du$$

L'intégrale qui apparaît dans le terme de droite au-dessus peut se dériver par rapport à z. En dérivant plusieurs fois nous obtenons des formules similaires pour les dérivées de f.

Théorème 4.11 (formules de Cauchy)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors f peut être dérivée autant de fois qu'on veut et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \Omega \setminus \gamma$ nous avons que*

$$f^{(n)}(z)\,\mathrm{Ind}(z,\gamma) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du.$$

Remarques.

a) Soulignons que ce théorème montre en particulier que la dérivée d'une fonction holomorphe est elle-même holomorphe.

b) Comme dans les théorèmes de Goursat et de Cauchy bis, nous pouvons supposer que la fonction f est holomorphe sauf éventuellement en un point où elle est continue. Nous obtenons alors que f est holomorphe aussi dans ce point exceptionnel.

La formule de Cauchy dans le cas d'un cercle donne la formule de la moyenne suivante :

Proposition 4.12 (formule de la moyenne)**.** *Soit f holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$. Alors*

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi i t})\,dt.$$

En prenant la valeur absolue dans les formules de Cauchy dans le cas où γ est un cercle, nous obtenons les inégalités de Cauchy.

Proposition 4.13 (inégalités de Cauchy)**.** *Soit f holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$. Alors*

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} \sup_{C(z_0,r)} |f|.$$

Une application immédiate des inégalités de Cauchy est le théorème de Liouville.

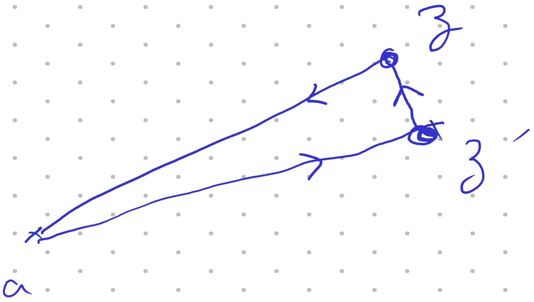
Théorème 4.14 (Liouville)**.** *Une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ est nécessairement constante.*

Le théorème de Liouville implique à son tour le théorème de d'Alembert.

démo du théorème 4.9.

Soit $a \in \Omega$ tq $\forall z \in \Omega$, $[a,z] \subset \Omega$

on pose $F(z) = \int_{[a,z]} f$



(Goursat) $\Longrightarrow \underbrace{\int_{[z,a]} f}_{-F(z)} + \underbrace{\int_{[a,z']} f}_{F(z')} + \int_{[z',z]} f = 0$

$$\Longrightarrow F(z) - F(z') = \int_{[z',z]} f$$

$$= (z-z') \int_0^1 f(z' + t(z-z'))\,dt$$

$$\Longrightarrow \frac{F(z)-F(z')}{z-z'} = \underbrace{\int_0^1 f(z'+t(z-z'))\,dt}_{\xrightarrow[\text{convergence dominée}]{z' \to z} f(z)}$$

Donc F holomorphe et $F' = f$ $\square$

Démo de la formule de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du - f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)-f(z)}{u-z}\,dz$$

On $F(u) = \begin{cases} \dfrac{f(u)-f(z)}{u-z} & \text{si } u \neq z \\ f'(z) & \text{si } u = z \end{cases}$

est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$ et continue sur Ω

Donc F a une primitive sur Ω.

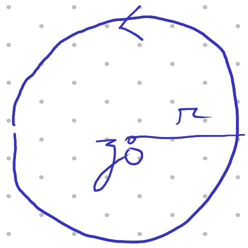
Donc $\displaystyle\int_\gamma F = 0$ $\square$

Théorème de Liouville

Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ (entière) bornée alors f constante

<u>démo</u> :

γ



$\gamma(t) = re^{it} + z_0 \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\forall r > 0, \quad f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{r^2 e^{2it}}\, re^{it}\,dt$$

$$\Rightarrow |f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi r}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\, e^{-it}\,dt\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

donc $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $f'(z_0) = 0$ $\square$

Corollaire : D'Alembert-Gauss.

Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ non constant

ALORS $\exists z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0$.

démo : $\lim\limits_{|z| \to \infty} \frac{1}{P(z)} = 0$

donc si $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$, alors

$\frac{1}{P}$ entière, bornée

$\underset{(\text{Liouville})}{\Longrightarrow} \frac{1}{P}$ constante contradiction.

Théorème 4.15 (d'Alembert)**.** *Tout polynôme non-constant admet une racine complexe.*

Le théorème de Goursat admet une réciproque. C'est le théorème de Morera.

Théorème 4.16 (Morera)**.** *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω. Si pour tout triangle $\triangle$ contenu dans Ω avec son intérieur nous avons que $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$, alors f est holomorphe.*

Voici maintenant une réciproque de la propriété qui affirme que l'intégrale sur un lacet d'une dérivée est nulle.

Théorème 4.17. *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω. La fonction f admet une primitive dans Ω si et seulement si $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout lacet γ de Ω.*

Ce théorème nous permet ensuite de caractériser les ouverts où une détermination holomorphe du logarithme existe de la manière suivante :

Corollaire 4.18. *Soit Ω un ouvert qui ne contient pas 0. Il existe une détermination holomorphe du logarithme sur Ω si et seulement si $\mathrm{Ind}(0, \gamma) = 0$ pour tout lacet γ de Ω.*

Proposition 4.19. *Soit Ω un ouvert étoilé, f une fonction holomorphe sur Ω qui ne s'annule pas : $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Alors il existe une détermination holomorphe de $\log f$ sur Ω.*

5 Analyticité, zéros, maximum

5.1 Analyticité des fonctions holomorphes

Les fonctions analytiques sont les sommes des séries entières.

Définition 5.1. *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω. On dit que f est analytique en un point $z_0 \in \Omega$ s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence > 0 telle qu'on ait,*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

au voisinage de z_0.

Nous avons vu que les fonctions analytiques sont holomorphes. Nous pouvons déterminer les coefficients a_n en fonctions des dérivées de f.

Proposition 5.2. *Soit f une fonction analytique en z_0 : $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$. Nous avons*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Il se trouve que toute fonction holomorphe est analytique. Ainsi, pour les fonctions d'une variable complexe, les notions d'holomorphie et d'analyticité coïncident.

Théorème 5.3. *Une fonction holomorphe est analytique en tout point. Plus précisément, si f est holomorphe sur $D(z_0, r)$ alors f est dévéloppable en série entière en z_0 et le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à r. De plus, f est égale à la somme de la série entière sur tout le disque $D(z_0, r)$.*

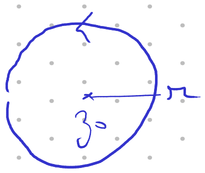
démo du théorème 5.3.

Soit f holomorphe sur $D(z_0, R)$.

Soit $R > r > 0$.

Formule de Cauchy $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z}\, du \quad \forall |z - z_0| < r$

où γ



$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{donc } f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})\, rie^{it}}{z_0 + re^{it} - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{1 - \left(\frac{z - z_0}{re^{it}}\right)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, e^{-int}\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{a_{n,r}} (z - z_0)^n$$

$$\text{où } a_{n,r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, \frac{e^{-int}}{r^n}\, dt.$$

La série $\sum_n a_{n,r} (z - z_0)^n$ converge si $|z - z_0| < r$

Mais alors $a_{n,r} = f^{(n)}(z_0) / n! =: a_n$ INDÉPENDANT de r

contre-exemple : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n$, $f^{(n)}(0) = 0$

f

Donc $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ converge $\forall |z - z_0| < r$

$(\forall r < R)$

$\Rightarrow \sum_n a_n z^n$ a un rayon $\geq R$.

et $\forall |z - z_0| < R$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. $\square$

Ex : La série entière $\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots$

a un rayon de convergence $\frac{\pi}{2}$.

5.2 Principe des zéros isolés

Commençons par montrer le résultat préliminaire suivant.

Proposition 5.4. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et $a \in \Omega$. Si f et toutes ses dérivées s'annulent en a (i.e. $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$), alors f est identiquement nulle.*

Définissons maintenant l'ordre d'un zéro de f.

Définition 5.5. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω et $a \in \Omega$ un zéro de f. L'ordre de a en tant que zéro de f, ou sa multiplicité, est l'ordre de la première dérivée non nulle de f en a. Si toutes les dérivées s'annulent en a, l'ordre est dit infini.*

L'ordre de a en tant que zéro de f est donc l'entier m caractérisé par la propriété suivante :

$$f(a) = f'(a) = \dots f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Fin du cours du 20/02/2023.

Par la proposition 5.4, les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sont tous d'ordre fini. Nous pouvons montrer aisément le résultat de factorisation suivant.

Proposition 5.6 (Factorisation)**.** *Soit Ω un ouvert, f une fonction holomorphe sur Ω. On a que a est un zéro d'ordre m si et seulement s'il existe une fonction g holomorphe sur Ω telle que $g(a) \neq 0$ et $f(z) = (z-a)^m g(z)$.*

Voici maintenant le principe des zéros isolés.

Théorème 5.7 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur Ω. Alors les zéros de f sont isolés.*

Ainsi, une suite injective de zéros de d'une fonction holomorphe non identiquement nulle peut s'accumuler ou bien à l'infini ou bien sur le bord de Ω mais jamais à l'intérieur. Exemples : les zéros de la fonction $e^z - 1$ tendent vers l'infini, ceux de $e^{\frac{1}{z}} - 1$ tendent vers 0 qui n'est pas dans le domaine de définition de la fonction.

Le principe des zéros isolés porte parfois le nom de principe de prolongement analytique car il permet de montrer le résultat suivant.

Proposition 5.8 (Principe du prolongement analytique)**.** *Soit Ω un ouvert connexe et f, g deux fonctions holomorphes. On suppose qu'il existe une suite injective z_n qui converge vers un point de Ω et telle que $f(z_n) = g(z_n)$ pour tout n. Alors $f \equiv g$.*

Ainsi, il suffit de connaître les valeurs d'une fonction holomorphe sur une telle suite pour connaître les valeurs sur tout l'ouvert Ω, c'est-à-dire la prolonger à Ω.

5.3 Principe du maximum

En général, la valeur absolue d'une fonction holomorphe ne peut pas avoir de maximum local à l'intérieur du domaine de définition.

Théorème 5.9 (principe du maximum)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω. Si $|f|$ admet un maximum local en un point de Ω, alors f est constante.*

Soit f une fonction holomorphe qui n'est pas constante et z_n une suite telle que $|f(z_n)| \to \sup_\Omega |f(z)|$. Si z_n est non bornée, alors il existe une sous-suite z_{n_k} qui tend vers l'infini. Le sup de $|f|$ s'obtient dans ce cas à l'infini. Si z_n est bornée, alors il existe une sous-suite z_{n_k} qui converge vers un élément a. Comme f n'est pas constante, $a \notin \Omega$. Donc $a \in \overline{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$. Dans ce cas, le sup de $|f|$ s'obtient sur le bord. On peut ainsi dire de manière un peu formelle (car on ne sait si f a une trace au bord ou une limite à l'infini) que $|f|$ admet son sup à l'infini ou sur le bord de l'ouvert de définition. Voici maintenant un énoncé rigoureux.

démo de la proposition.

$$\Omega' = \{x \in \Omega : \forall n \geq 0 \quad f^{(n)}(x) = 0\}$$

Ω' est fermé comme intersection de fermé.

Ω' est ouvert !

En effet soit $x \in \Omega'$.

Alors $\exists r > 0$, $f \in \mathcal{O}(D(x,r))$ holomorphe

$\Rightarrow$ f analytique et

$$\forall |z-x| < r, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-x)^n$$

série de rayon $\geq r$

Or $\forall n$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!} = 0$

$\Rightarrow f(z) = 0 \quad (\forall |z-x| < r)$

$\Rightarrow \forall |z-x| < r, \ f^{(n)}(z) = 0$

$\Rightarrow \forall |z-x| < r, \ z \in \Omega'$.

Or Ω connexe $\Rightarrow \Omega' = \Omega$ ou $\emptyset$. On a $\in \Omega' \neq \emptyset$.

$\Rightarrow f = 0$.

démo du théorème des zéros isolés 5.7 :

Soit $f \neq 0$. Soit $a \in \Omega$ connexe tq $f(a) = 0$

Alors $\exists n > 0$, $\forall\, 0 \leq k \leq n-1$, $f^{(k)}(a) = 0$
et $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Or f analytique donc $\exists r > 0$,

$$\forall |z-a| < r, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

où $\sum c_n z^n$ de rayon $\geq r$

$$= (z-a)^m \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}$$

$$= (z-a)^m \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m} (z-a)^k}_{H(z)} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0$$

$H(a) \neq 0 \Rightarrow \exists\ 0 < r' < r,\ \forall\ |z-a| < r',\ H(z) \neq 0.$

En particulier, $\forall\ 0 < |z-a| < r'$, $f(z) = (z-a)^m H(z) \neq 0.$

Pause.

$$F(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt$$

$$\left(e^{F(b)}\right)' = F'(b)\, e^{F(b)}$$

$$= \frac{\gamma'(b)}{\gamma(b) - z}\, e^{F(b)} \Rightarrow (\gamma(b) - z)(e^F)' = \gamma'(b) e^{F(b)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^F}{\gamma - z}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow e^{F(b)} = e^{F(a)} = 1$$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ = continue sur $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$

constant sur les composantes connexes.