Corollaire 3.15. *a) Il existe une détermination holomorphe de* $\log(f)$ *sur* Ω *si et seulement si* $\frac{f'}{f}$ *admet une primitive sur* Ω.

b) Il existe une détermination holomorphe de $\log(z)$ *sur* Ω *si et seulement si* $\frac{1}{z}$ *admet une primitive sur* Ω.

c) La dérivée d'une détermination holomorphe de $\log(z)$ *est toujours* $\frac{1}{z}$.

Un dernier résultat sur le logarithme :

Proposition 3.16. *Pour tout* $|z| < 1$ *nous avons que*

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

4 Intégration, indice, Cauchy

4.1 Intégration complexe

Commençons par plusieurs définitions.

Définition 4.1. *a) Un chemin est une courbe* C^1 *par morceaux.*

b) L'origine d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *est* $\gamma(a)$*. L'extrémité est* $\gamma(b)$.

c) Un lacet est une courbe fermée : $\gamma(a) = \gamma(b)$.

d) Un chemin simple est un chemin sans intersections (la paramétrisation est injective).

e) Un changement de paramètre est toujours un C^1 *difféomorphisme* <u>*croissant*</u> *(le sens de parcours de la courbe est préservé).*

f) On désigne par γ_- *la courbe parcourue dans le sens opposé :* $\gamma_- : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_-(t) = \gamma(a+b-t)$.

g) Si γ_1 *et* γ_2 *sont deux courbes telles que l'extrémité de* γ_1 *est l'origine de* γ_2 *on définit l'union* $\gamma_1 \vee \gamma_2$ *comme étant la courbe paramétrée par*

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [1,2] \end{cases}$$

(par un changement de paramétrage on peut supposer γ_1 *définie sur* $[0,1]$ *et* γ_2 *définie sur* $[1,2]$*.)*

h) Si f *est une fonction continue sur un chemin* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$*, on définit*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

où le produit $f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ *se fait en tant que nombres complexes.*

Voici quelques propriétés élémentaires de l'intégrale complexe.

Proposition 4.2. *a) L'intégrale complexe est linéaire.*

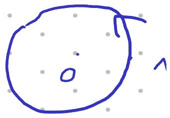
b) L'intégrale complexe est invariante par changement de paramètrage.

c) Si on change le sens de parcours d'une courbe, l'intégrale change de signe :

$$\int_{\gamma_-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

$\gamma_- : [a,b] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto \gamma(a+b-t)$

Ex. $\gamma = C(0,1)$



$$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto e^{it}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \int_\gamma z^n \, dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

En effet : $$\int_0^{2\pi} e^{int} \cdot ie^{it} \, dt = \int_0^{2\pi} i \cdot e^{i(n+1)t} \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n+1 \neq 0 \\ 2i\pi & \text{si } n+1 = 0 \end{cases}$$

d) Nous avons l'inégalité

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \le \mathrm{long}(\gamma)\sup_{z\in\gamma}|f(z)|.$$

e) Si f est holomorphe alors

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

f) Si f admet des primitives et γ est un lacet alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

g) Si l'extrémité de γ_1 est l'origine de γ_2 alors

$$\int_{\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

h) Si $f_n \to f$ uniformément sur γ alors

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Fin du cours du 23/01/2023.

Exemples.

— Si $\overrightarrow{z_1z_2}$ est le segment qui va de z_1 à z_2 et $C \in \mathbb{C}$, alors

$$\int_{\overrightarrow{z_1z_2}} C\,dz = C(z_2 - z_1).$$

— Si $C(0,1)$ est le cercle unité orienté dans le sens direct, alors

$$\int_{C(0,1)} z^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

En particulier, $\frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ ni sur aucun ouvert contenant le cercle unité. On ne peut donc pas avoir de détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ ni sur aucun ouvert contenant le cercle unité.

Comme l'intégrale complexe ne dépend pas du paramétrage de la courbe, pour travailler avec une intégrale complexe il suffit de disposer de l'image de la courbe et de son sens de parcours. On pourra choisir le paramétrage comme on veut dès lors que le sens de parcours est préservé. En pratique, on ne donnera pas le paramétrage d'une courbe ; on donnera seulement son image et son sens de parcours. Dans le cas d'un lacet simple, parfois il n'est même pas nécessaire de spécifier le sens de parcours. On choisira par défaut le sens direct (ou sens trigonométrique), c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une horloge. L'autre sens est appelé sens rétrograde.

4.2 Indice d'un point par rapport à un lacet

Définition 4.3. *Soit γ un lacet et $z_0 \notin \gamma$. On définit l'indice du point z_0 par rapport à la courbe γ :*

$$\mathrm{Ind}(z_0, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz.$$

$z_0 \notin \mathrm{Im}\, \gamma$

Voici quelques propriétés de l'indice.

Proposition 4.4. *Soit γ un lacet et $z_0 \notin \gamma$.*

a) L'indice est toujours entier : $\mathrm{Ind}(z_0, \gamma) \in \mathbb{Z}$.

b) L'indice est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

c) L'indice est nul sur la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Formule géométrique pour l'indice. Nous avons l'interprétation géométrique suivante de l'indice. L'indice est le nombre de tours que l'on fait autour de z_0 lorsqu'on parcourt complètement la courbe (les tours dans le sens direct comptent pour $+1$, ceux dans le sens rétrograde comptent pour -1). Dans le cas d'une courbe d'allure compliquée, il est utile de procéder de la manière suivante. On trace une demi-droite arbitraire d'origine z_0. Pour chaque intersection de la demi-droite avec la courbe on compte $+1$ si la courbe croise la demi-droite dans le sens direct et -1 sinon (le sens direct ou rétrograde est défini par rapport à z_0, c'est-à-dire en supposant que l'origine est en 0). On fait la somme et le résultat est l'indice de z_0.

Remarquons enfin que dans le cas d'un lacet simple, l'indice à l'intérieur de la courbe est ± 1, suivant que la courbe est parcourue dans le sens direct ou pas.

Définition 4.5. *Un lacet simple est dit orienté dans le sens direct si l'indice d'un point situé à l'intérieur du lacet est égal à 1.*

4.3 Théorème et formules de Cauchy. Applications

Définition 4.6. *Un ouvert Ω est dit étoilé s'il existe $a \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ nous avons que tout le segment fermé $[a, z]$ est inclus dans Ω.*

Le but de cette partie est de montrer le théorème de Cauchy suivant.

Théorème 4.7 (Cauchy)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

En fait, on peut se passer de l'hypothèse que Ω est étoilé. Il suffit de supposer que f est holomorphe à l'intérieur du lacet γ.

Pour montrer ce théorème, on considére d'abord le cas d'un triangle.

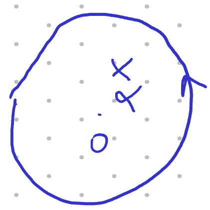
Théorème 4.8 (Goursat)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\triangle$ un triangle inclus (avec son intérieur) dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω sauf éventuellement en un point où elle est continue. Alors*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0.$$

Fin du cours du 30/01/2023.

Voici maintenant une version légèrement améliorée du théorème de Cauchy.

Ex. $\gamma = C(0,1)$



$$\gamma(t) = e^{it}$$

$$\mathrm{Ind}_{C(0,1)}(\alpha) = \mathrm{Ind}(\alpha, C(0,1))$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } |\alpha| < 1 \\ 0 & \text{si } |\alpha| > 1 \end{cases}$$

en effet $|\alpha| > 1$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-\alpha}$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{1-\frac{e^{it}}{\alpha}}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\left(1-\frac{e^{it}}{\alpha}\right)'\,dt$$

$$= \mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) - \mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

Si $|\alpha| < 1$; $\dfrac{ie^{it}}{e^{it}-\alpha} = \dfrac{(e^{it}-\alpha)'}{e^{it}-\alpha}$

On $e^{it}-\alpha = e^{it}\left(1-\alpha e^{-it}\right)$

$= e^{it} e^{\mathrm{Log}(1-\alpha e^{-it})}$

$= e^{it+\mathrm{Log}\,(1-\alpha e^{-it})}$ (si $|\alpha|<1$)

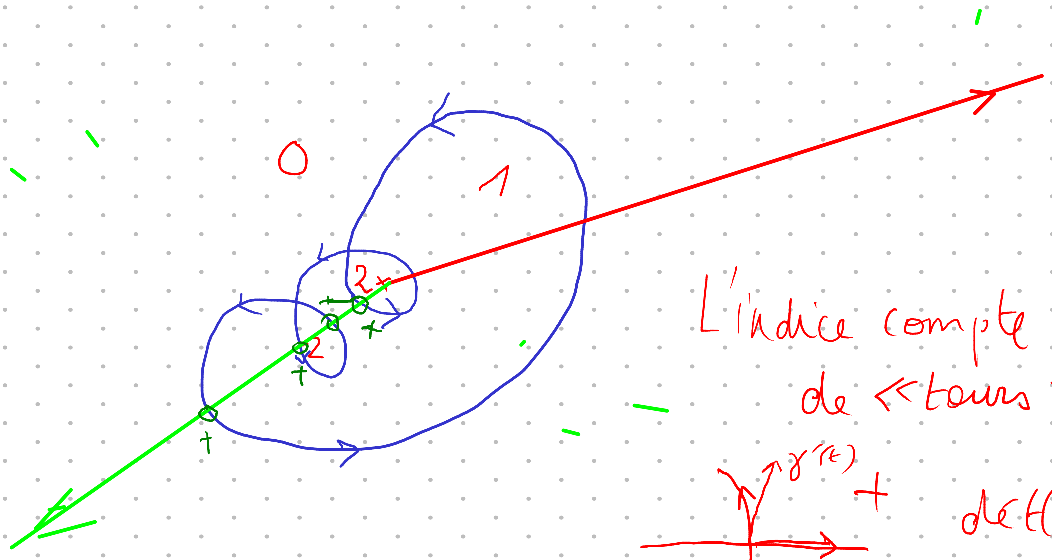
$= e^{f(t)}$

où $f(t) = it + \mathrm{Log}\left(1-\alpha e^{-it}\right)$

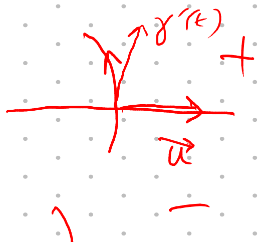
$\Rightarrow \dfrac{(e^{it}-\alpha)'}{e^{it}-\alpha} = f'(t)$

$\Rightarrow \displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} f'(t)\,dt = f(2\pi)-f(0)$

$(|\alpha|<1)$ $= 2i\pi$.

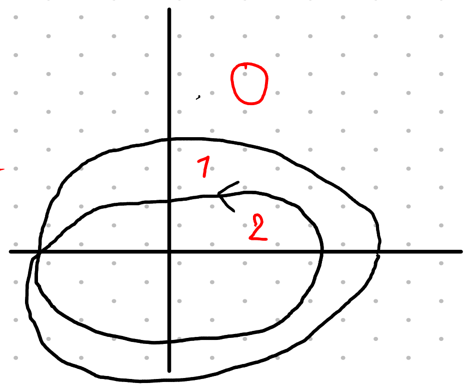


L'indice compte le nombre de « tours »



$\det(\vec{u},\gamma'(t))$

exo: $\gamma(t) = (2+\cos t)e^{2it}$ $0\le t\le 2\pi$



Pause