Analyse complexe

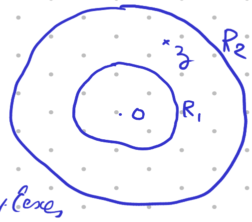
1) Séries de Laurent

définition. Une série de Laurent est de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$
où $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$

exemples. $\frac{1}{z-z^2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \quad (\forall\, 0<|z|<1)$

$= -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \quad (\forall\, |z|>1)$

Théorème de Laurent



Soit $\mathcal{C}_{R_1,R_2} = \{z\in\mathbb{C} : R_1<|z|<R_2\}$ $\quad (0\le R_1 < R_2 \le +\infty)$
(anneau)

Si $f \in \mathcal{O}(\mathcal{C}_{R_1,R_2})$, alors il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de complexes,
tq : $\forall\, R_1<|z|<R_2$, $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$

fonctions holomorphes $\mathcal{C}_{R_1,R_2} \to \mathbb{C}$

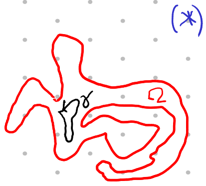
et $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\cdot|z|^n < \infty$ et $\sum_{n=-1}^{-\infty} |a_n|\,|z|^n < \infty$
$\quad = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}|\,|z|^{-n}$

ex : $\frac{1}{z-z^2} \in \mathcal{O}(\mathcal{C}_{0,1})$ et $\frac{1}{z-z^2} \in \mathcal{O}(\mathcal{C}_{1,\infty})$.

Formule de Cauchy généralisée.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, soit $\gamma \subset \Omega$ lacet, soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, tq
$(*)$ $\forall z \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$

ex :



ALORS $\forall z \in \Omega\setminus\gamma$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z)\, f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

Corollaire. mêmes hypothèses : $\int_\gamma f = 0$
(appliquer la formule de Cauchy à $F(w) = f(w)(w-z)$ $\quad (z\in\Omega\setminus\gamma)$)

démo de la formule de Cauchy généralisée :

Poser $H(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw & \text{si } z\in\Omega \\ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw & \text{si } \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0 \end{cases}$

H bien définie !

H holomorphe sur $\Omega \cup \underbrace{\{z\in\mathbb{C}\setminus\gamma : \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0\}}_{\text{ouvert}} = \mathbb{C}$

Or $\lim_{|z|\to+\infty} |H(z)| = 0$ en effet $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$

et $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw = f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 0$

sur compo connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma$

Donc (Liouville) $H = 0$ $\square$

Remarque importante:

Si $\Gamma = n_1\gamma_1 + \dots + n_r\gamma_r$ $\quad n_i \in \mathbb{Z}$, γ_i lacets dans Ω

on pose $\displaystyle\int_\Gamma h := \sum_{i=1}^{r} n_i \int_{\gamma_i} h \qquad \forall h \in \mathcal{O}(\Omega)$.

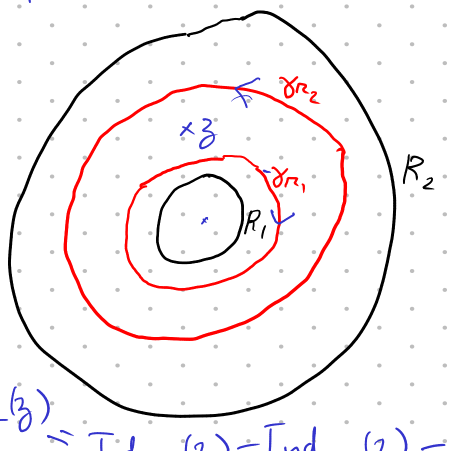
et $\displaystyle \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \sum_{i=1}^{r} n_i \,\mathrm{Ind}_{\gamma_i}(z) \qquad (\forall z \notin \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_r)$

La formule de Cauchy généralisée est vrai pour une combinaison linéaire à coefficients entiers $\Gamma = n_1\gamma_1 + \dots + n_r\gamma_r$ avec $n_i \in \mathbb{Z}$, γ_i lacets $\subset \Omega$

(à la place de γ)

démo du théorème de Laurent

Soient $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$



$\gamma_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$\quad t \longmapsto re^{it}$

On applique la formule de Cauchy à f et $\Gamma = \gamma_{r_2} - \gamma_{r_1}$

$$\forall\ |z| \leq R_1 \text{ ou } |z| \geq R_2,\ \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_{r_2}}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_{r_1}}(z) = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & \text{si } |z| \geq R_2 \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } |z| \leq R_1 \end{cases}$$

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) f(z) = f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Or $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^k dw = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw}_{a_{k,r_2}}\Big) z^k$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{z(1-\frac{w}{z})}\,dw = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int f(w) w^k\,dw\right)\frac{1}{z^{k+1}} = \sum_{k=-1}^{-\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw}_{a_{k,r_1}}\Big) z^k$$

donc $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,r_2} z^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} a_{k,r_1} z^k$$

avec $$a_{k,r} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw \qquad (\forall R_1 < r < R_2)$$

De plus $a_{k,r}$ ne dépend pas de r car $\displaystyle \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw$

$a_{k,r} = a_k$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r - \gamma_{r'}} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw = 0 \quad \text{(Formule de Cauchy)}$$

holomorphe sur $\mathcal{C}_{R_1,R_2}$

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$$

De plus $\displaystyle a_k = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw$ $\quad (\forall R_1 < r < R_2)$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

(car $\displaystyle\int_{\gamma_r} z^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } k = -1 \end{cases}$ $\qquad z^k = \left(\frac{z^{k+1}}{k+1}\right)'$)

2) Singularités

Définition Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert Soit $z_0 \in \Omega$, Soit f fonction

On dit que f a une singularité en z_0 s'il existe $R > 0$ tq $f \in \mathcal{O}(D(z_0,R)\setminus\{z_0\})$

ex: $\frac{1}{z}$ a singularité en 0

Si f a singularité en z_0 alors d'après le théorème de Laurent, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ pour certains $a_n \in \mathbb{C}$.

a) Si $\forall n<0$, $a_n = 0$, on dit que f a une singularité artificielle en z_0 (f holomorphe en z_0)

b) si $\emptyset \neq \{n<0 : a_n \neq 0\}$ est fini on dit que f a un $\boxed{\text{pôle en } z_0}$

(pôle d'ordre q si $-q = \min\{n<0 : a_n \neq 0\}$)

(ex $\frac{1}{z^2}$ pôle d'ordre 2 en 0)

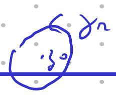
c) si $\{n<0 : a_n \neq 0\}$ infini on dit que f a une $\boxed{\text{singularité essentielle en } z_0}$

Par ex. $e^{1/z}$ a singularité essentielle en 0.

Définition : Si f a singularité en z_0, a_{-1} est le résidu de f en $z_0 =: \text{Rés}_{z_0} f$

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Remarque : $\text{Rés}_{z_0} f = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f$ où $\gamma_r : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto z_0 + r e^{it}$ $(0 < r \ll 1)$



Théorème des résidus.

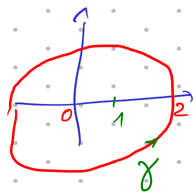
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert. Soit $\gamma \subset \Omega$ lacet. Soit f fonction tq

1) $\forall z \notin \Omega$, $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$

2) $\forall z \in \Omega$, f holomorphe en z ou a une singularité en z.

3) Si $z \in \Omega$ pôle ou une singularité essentielle alors $z \notin \gamma$.
(vraie singularité)

Alors $$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f = \sum_{z \in \mathbb{C}} \text{Rés}_z f \, \text{Ind}_\gamma(z)$$
(somme finie)



ex $\quad f(z) = \frac{1}{z - z^2}$

$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto 2e^{it}$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \underbrace{\text{Rés}_0 f}_{1} \underbrace{\text{Ind}_\gamma(0)}_{\cancel{0}\, 1} + \underbrace{\text{Rés}_1 f}_{-1} \underbrace{\text{Ind}_\gamma(1)}_{1} = 0$$

$$\frac{1}{z-z^2} = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \quad \forall |z|<1$$
$$= \frac{1}{z} + \cdots$$
$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z}$$
$$= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z-1}$$
$$= -\frac{1}{1+(z-1)} \cdot \frac{1}{z-1}$$
$$= \frac{-1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k$$
$$= \frac{-1}{z-1} + \cdots$$

Pause