

Courbes paramétrées.

On dit que la courbe $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ a un point multiple en (x,y) s'il existe $t_1 \neq t_2$ tq $x(t_1) = x(t_2) = x$
 $y(t_1) = y(t_2) = y$

Ex. $\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t^3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

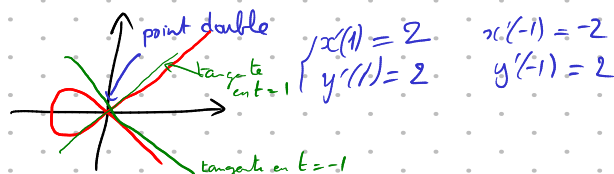
$\mathcal{C}$ a un unique point double: $(0,0)$.

En effet: $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2 - t_2^2 = 0 \\ t_1^3 - t_2^3 - t_1 + t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 0 \\ (t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 - 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 0 \\ t_1^3 + t_1 t_2 + t_2^3 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = -t_1 \\ t_1^3 - t_1^3 + t_1^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = -t_1 \\ t_1 = \pm 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x(1) = x(-1) = 0 \\ y(1) = y(-1) = 0 \end{cases}$ donc $(0,0)$ point double.



Tangentes

Si $\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ courbe paramétrée $\mathcal{C}^1$.

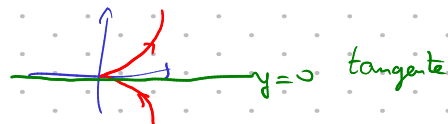
On dit que t est régulier si $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ régulier si $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$

Dans ce cas la tangente en t est $\mathbb{R} \cdot (x'(t), y'(t))$.

Si $x'(t) = y'(t) = 0$ on dit que t singulier.

définition Si $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ on dit que $y = \alpha(x - x(t_0)) + y(t_0)$ est la tangente en t_0 (si $\alpha = \pm\infty$, $x = x(t_0)$)

Ex: $\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$ O: singulier
 $\frac{y(t)}{x(t)} = t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$



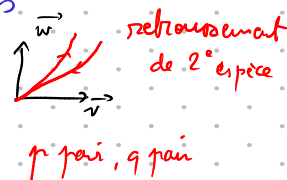
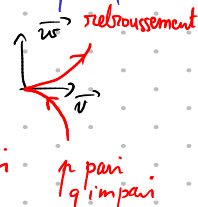
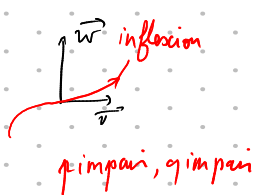
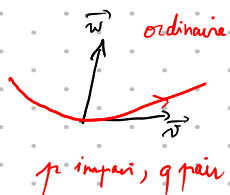
Allure de la courbe au voisinage d'un point.

Soit $M(t) = (x(t), y(t))$ Courbe paramétrée

On suppose que $M(t) = M(t_0) + t^p \vec{v} + t^q \vec{w}$

ou $\vec{v}, \vec{w}$ vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^2$
 $0 < p < q$ entiers

Dans ce cas:



Démonstration. On applique le théorème d'inversion locale à :

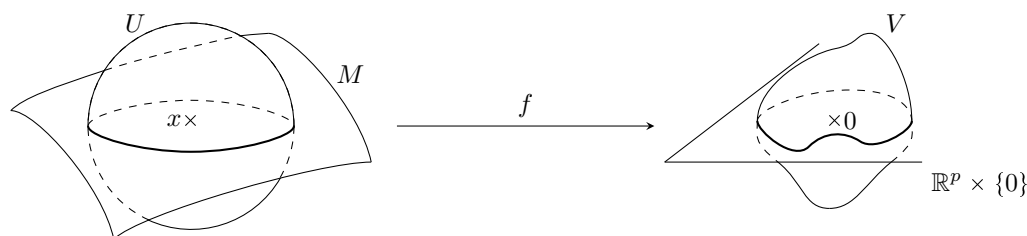
◊ $g : (x^1, \dots, x^p, y^{p+1}, \dots, y^n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x), f_{p+1}(x) + y^{p+1}, \dots, f_n(x) + y^n)$ dans le cas d'une immersion, après permutation éventuelle des (f_j) .

◊ $h : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_{n-p}(x), x^{n-p+1}, \dots, x^n)$ dans le cas d'une submersion. $\square$

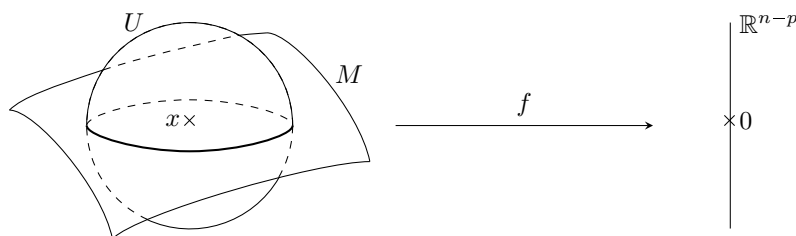
Cette clarification permet d'envisager des définitions d'espaces géométriques de dimension p et de régularité C^k dans $\mathbb{R}^n$, définitions qui se révèlent équivalentes :

Proposition et Définition 3. Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe C^k s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. (définition locale par **redressement**) pour tout x de M , il existe des voisinages respectifs U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'un C^k -difféomorphisme $f : U \rightarrow V$, envoyant x sur 0 , et telle que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

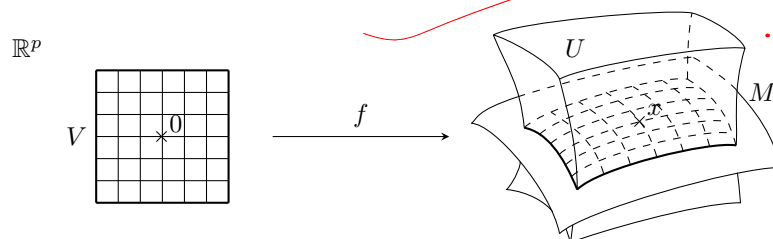


- * 2. (définition locale par **fonction implicite**) pour tout x de M , il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ ainsi que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ une C^k -submersion en x , telle que $U \cap M = f^{-1}(\{0\})$.



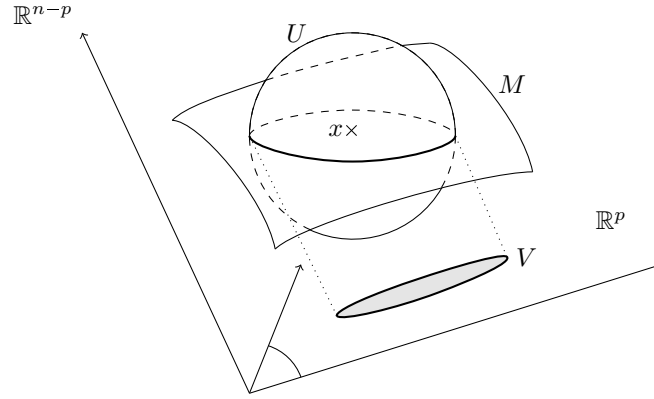
ex :
 $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$
 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$
 $f'(0) = \mathcal{C}$

- * 3. (définition locale par **paramétrage**) pour tout x de M , il existe des voisinages respectifs U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V de 0 dans $\mathbb{R}^p$, ainsi que $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ une C^k -immersion en 0 , envoyant 0 sur x , et induisant un homéomorphisme $V \rightarrow U \cap M$.



ex : $\mathcal{C} = \{(\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$

4. (définition locale par **graphe**) pour tout x de M , on a un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, une identification linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ et une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k telle que $U \cap M$ soit le graphe de f , i.e. $U \cap M = \{(y, f(y)) \mid y \in V\}$.



Démonstration. 1.⇒2. Soient x , U et f comme dans le point 1.; on note $f_1, \dots, f_n$ les composantes de f . Alors $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$, $x \mapsto (f_{p+1}(x), \dots, f_n(x))$ est une submersion de classe C^k car $g = f \circ \pi$, et $g^{-1}(\{0\}) = U \cap M$.

2.⇒1. On va utiliser le théorème de forme normale des submersions. Soient donc x , U et f comme dans le point 2., et $F = f(\cdot + x)$; le théorème nous donne $\Phi : V \rightarrow (U - x)$ un C^k -difféomorphisme local tel que $F \circ \Phi(z^1, \dots, z^n) = (z^{p+1}, \dots, z^n)$. Ainsi $\Phi^{-1}(\cdot - x) : U \rightarrow V$ est un C^k -difféomorphisme envoyant x sur 0 , et si $y \in U \cap M$, $0 = f(y) = F(y - x) = F \circ \Phi[\Phi^{-1}(y - x)]$ donc $\Phi^{-1}(y - x) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$. De plus si $z \in V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$, et $y := \Phi(z) + x \in U$ de sorte que $z = \Phi^{-1}(y - x)$, on a bien $f(y) = F \circ \Phi(z) = 0$, donc $y \in M$.

1.⇒3. Soient x , U , V et f comme dans 1. Supposons que $f(x) = 0$. Alors si $W = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$, W est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et $f^{-1}|_W$ est une submersion C^k , et un homéomorphisme $W \rightarrow U \cap M$.

3.⇒1. On traite cette implication avec le théorème de forme normale locale des immersions. Si x , U , V et f sont comme dans 3., alors quitte à restreindre U et V , il existe un C^k -difféomorphisme $\psi : U \rightarrow W$, tel que $\psi(x) = 0$, et $\psi \circ f : V \rightarrow W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ est un C^k -difféomorphisme. Dans cette situation, $\psi(U \cap M) = \psi \circ f(V) = W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

4.⇒3. On prend x , U , V et f comme dans 4., et on suppose que $0 \in V$ et $f(0) = 0$. Alors $F : y \mapsto (y, f(y))$ est un homéomorphisme de V sur $U \cap M$, qui est de plus une immersion en 0 , vérifiant $F(0) = 0$.

2.⇒4. Soient x , U , f comme dans 2. On pose $f = (f_1, \dots, f_{n-p})$, et on suppose que $x = 0$. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que la matrice $(\frac{\partial f_j}{\partial x_{p+i}}(0))_{1 \leq i, j \leq n-p}$ est inversible – comme f est une submersion, la matrice complète de ses dérivées partielles en 0 admet au moins un mineur d'ordre $n - p$ inversible.

Soit $F : y \mapsto (y_1, \dots, y_p, f(y))$. Alors dF_0 est inversible (par blocs), d'inverse disons $z \mapsto (z_1, \dots, z_p, g(z))$. Quitte dans ce cas à restreindre U , $U \cap M = f^{-1}(\{0\}) = F^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$, ce qui n'est autre que le graphe de g au dessus de $(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap \mathcal{D}_g$. $\square$

2 Exemples et contre-exemples

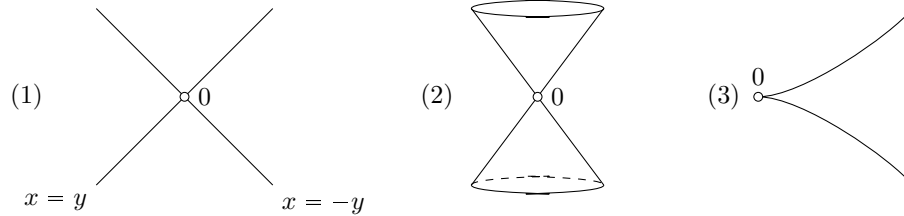
- Tout ouvert de $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$;
- Toute sous-variété C^∞ connexe de dimension 1 est difféomorphe soit à $\mathbb{R}$, soit à S^1 [M, App.].

- Vocabulaire : on dit qu'une sous-variété est *lisse* lorsqu'elle est de classe C^∞ , et *analytique réelle* lorsqu'elle est C^ω .

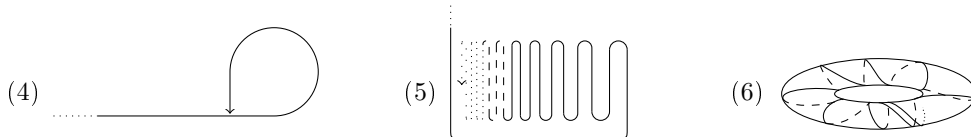
On parle de *courbe* lorsque la dimension p vaut 1, de *surface* quand $p = 2$, et plus généralement d'*hypersurface* lorsque $p = n - 1$.

Nous ne développerons pas ce point de vue, mais lorsque n et p sont pairs, on peut identifier $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ à $\mathbb{C}^{n/2}$ et $\mathbb{C}^{p/2}$ respectivement. Si l'on remplace alors la condition « de classe C^k » sur f par « holomorphe » dans la définition-proposition, on définit une *sous-variété (analytique) complexe* de $\mathbb{C}^{n/2}$.

- Appauvrissement de structure : si $\ell \geq k \geq 1$, alors toute sous-variété C^ℓ est une sous-variété C^k .
- Ne sont pas des sous-variétés : (1) $\{x^2 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, (2) $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, (3) $\{(t^2, t^3), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ (points doubles).



ATTENTION : l'image réciproque d'un point par une submersion est une sous-variété, mais l'image directe d'une immersion, même injective, n'est pas nécessairement une sous-variété (immergée). Une sous-variété est localement fermée, c'est-à-dire ouverte dans son adhérence (ou : localement intersection d'un ouvert et d'un fermé). Les exemples suivants ne sont donc pas des sous-variétés : (4) « $\mathbb{R}$ replié sur lui-même », (5) « $\mathbb{R}$ replié sur lui-même en oscillant », (6) $\{(e^{it}, e^{i\sqrt{2}t}), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ (« géodésique irrationnelle du tore »)



- La sphère $\mathbb{S}^n = \{(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^0)^2 + \dots + (x^n)^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ analytique réelle :

1. soit $x \in \mathbb{S}^n$; on peut supposer $x^0 > 0$. Soit $U = \{x^0 > 0\}$, ouvert dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et soit

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$x \longmapsto ((x^0)^2 + \dots + (x^n)^2 - 1, x^1, \dots, x^n).$$

Alors f est un C^ω -difféomorphisme sur son image, et $f(\mathbb{S}^n \cap U) = \{0\} \times \mathbb{R}^n$.

2. posons $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Alors

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (x^0)^2 + \dots + (x^n)^2 - 1$$

est une submersion C^ω , et $\mathbb{S}^n \cap U = \mathbb{S}^n = f^{-1}(\{0\})$.

3. soit $V =]-\pi/2, \pi/2[\times \mathbb{R}^n$; c'est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soit

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (t_1, \dots, t_n) \longmapsto (\cos t_1, \sin t_1 \cos t_2, \dots, \sin t_1 \sin t_2 \cdots \sin t_n);$$

c'est une immersion C^ω de V dans $\mathbb{S}^n$, et un homéomorphisme sur son image.

4. si $x^0 > 0$, $x^0 = (1 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2)^{1/2} : \mathbb{S}^n \cap \{x^0 > 0\}$ est le graphe de $(x^i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto (1 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2)^{1/2}$ au-dessus de $\{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < 1\}$.

- Les espaces projectifs $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ peuvent être vus comme sous-variétés, mais attention, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
- Les groupes classiques $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ (c'est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$), $\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, ainsi que $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{U}_n$, $\mathcal{SU}_n$. Attention, $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{SU}_n$ ne sont que des sous-variétés analytiques réelles, et non complexes, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit plus loin (§4) les *variétés* différentielles, sans faire appel à un espace affine ambiant. Se restreindre aux sous-variétés des $\mathbb{R}^n$ autorise néanmoins une certaine généralité, dans la mesure où l'on a :

Théorème 4 (Whitney, 1944, [W]). *Toute variété C^k de dimension $n > 0$ se plonge de manière C^k dans $\mathbb{R}^{2n}$.*

L'exemple de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, qui se généralise aux dimensions supérieures 2^p , indique que la dimension $2n$ de l'espace de plongement est généralement optimale.

3 Espace tangent

On se donne M une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^n$ de dimension p , et un point $x \in M$.

Définition 5. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est **tangent** à M en x s'il existe $\delta > 0$ et $c :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^1 à image dans M telle que : $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$.

On note $T_x M$ l'ensemble des vecteurs tangents à M en x , que l'on appelle **sous-espace (vectoriel) tangent à M en x** ($x + T_x M$ étant le sous-espace **affine** tangent à M en x).

Proposition 6. 1. Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et $f : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme tel que $f(x) = 0$ et $f(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap V$, alors : $T_x M = (df_x)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

2. Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion C^1 en x telle que $U \cap M = f^{-1}(f(x))$, alors : $T_x M = \ker(df_x)$.

3. Si U est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$, U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$, et $f : V \rightarrow U$ un paramétrage local de M en x avec $f(0) = x$, alors : $T_x M = \text{Im}(df_0)$.

Démonstration. (1.) La donnée d'une courbe c tracée sur M avec $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$ équivaut à celle de $f \circ c$ tracée sur $f(U \cap M)$ avec $f \circ c(0) = 0$ et $(f \circ \dot{c})(0) = df_x(v)$. Or les vecteurs tangents à une courbe linéaire sont les vecteurs de cette courbe/droite. En particulier, $T_x M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p .

Nota bene : si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et C^1 par analytique complexe, les différentielles sont $\mathbb{C}$ -linéaires en tant que différentielles de fonctions holomorphes, et donc $T_x M$ est un sous-espace complexe de $\mathbb{C}^n$.

$$T_x M = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists \delta > 0, c :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}^n, C^1, c(0) = x, \dot{c}(0) = v\}$$

Ex: $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1 \quad f = x^2 + y^2 - 1$

$$T_{(1,0)} \mathcal{C} = \ker df_{(1,0)} = \ker (2dx) = 0 \times \mathbb{R}$$

$\bigcirc_{(1,0)}$ $\bigg|$ $T_{(1,0)} \mathcal{C}$

$$\mathcal{C}_1: (\cos t, \sin t) \quad c(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T_{(1,0)}\mathcal{C}_1 = \text{Im } c'(0) \\ = \mathbb{R}(0,1)$$



$$\uparrow c'(0) \\ T_{(1,0)}\mathcal{C}_1$$

(2.), sens $\subset$: si c est une courbe tracée sur M telle que $c(0) = 0$ et $\dot{c}(0) = v$, alors comme $f(c(t)) = f(x)$ pour tout t petit car f est une équation locale de M près de x , et donc $df_x(v) = 0$: $v \in \ker(df_x)$.

Pour l'inclusion réciproque, on conclut simplement comme suit : $T_x M$ et $\ker(df_x)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, $\dim T_x M = p$, et f est une submersion donc $\dim(\ker df_x) = n - (n - p) = p$. Ainsi $T_x M = \ker(df_x)$.

(3.), sens $\subset$: soit $v \in \mathbb{R}^p$; soit γ une courbe C^1 dans V , avec $\gamma(0) = 0$ et $\dot{\gamma}(0) = v$. Alors $c := f \circ \gamma$ est une courbe C^1 tracée sur M , telle que $c(0) = f(\gamma(0)) = x$, et $\dot{c}(0) = df_0(v)$.

L'inclusion réciproque se traite à nouveau par un argument de dimension : $\dim(\text{Im } df_0) = p$, car df_0 est injective (f est une immersion en 0). $\square$

Exemples :

1. $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$, où $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \|x\|^2$; ainsi $T_x \mathbb{S}^n = \ker(v \rightarrow 2\langle x, v \rangle) = x^\perp$.
2. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ (U ouvert de $\mathbb{R}^p$) est C^1 , $M = \text{graph}(f) \subset \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, et $x_0 \in U$; on pose $y_0 = f(x_0)$ et $u = (x_0, y_0)$. Alors l'équation de $u + T_u M$ est : $y - y_0 = df_{x_0}(x - x_0)$.
3. On note $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{tr}(X) = 0\}$, $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), {}^t X = -X\}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), {}^t \bar{X} = -X\}$, $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Ce sont les espaces tangents en l'identité, ou *algèbres de Lie*, de $\mathcal{S}\ell(n, \mathbb{K})$, $\mathcal{O}(n, \mathbb{K})$ (ou $\mathcal{SO}(n, \mathbb{K})$), $\mathcal{U}(n)$ et $\mathcal{SU}(n)$, respectivement.

Extrema liés : Une fois acquise la notion d'espace tangent pour une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, un résultat tel que le théorème des extrema liés s'interprète de manière naturelle. Rappelons-en l'énoncé :

Théorème 7. Soient $f, g_1, \dots, g_q$ des fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles ; soit X l'ensemble défini par l'annulation des g_j sur U : $X = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_q(x) = 0\}$. Si la restriction de f à X admet un extremum local en a , et si les différentielles $(dg_1)_a, \dots, (dg_q)_a$ sont des formes linéaires indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que l'on ait l'égalité de formes linéaires :

$$df_a = \lambda_1 (dg_1)_a + \dots + \lambda_p (dg_p)_a$$

(les coefficients λ_j sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**).

L'hypothèse d'indépendance linéaire des dg_j au point a nous dit aisément que $g = (g_1, \dots, g_q)$ est une submersion en a donc au voisinage de a , donc que X est une variété au voisinage de a par la définition par fonction implicite. Prenons un chemin c tracé sur X tel que $c(0) = a$, et où $\dot{c}(0) = v$ est quelconque dans $T_a X$. Alors comme f atteint un extremum en a , $df_a(v) = 0$, et ce pour tout $v \in T_a X$. Ainsi df_a est nulle sur $T_a X$, soit $\bigcap_{j=1}^q \ker[(dg_j)_a] = T_a X \subset \ker(df_a)$; la conclusion suit par algèbre linéaire standard.

4 Variétés différentielles

L'exemple des vecteurs tangents suggère que les sous-variétés différentielles de $\mathbb{R}^n$ disposent d'une structure différentielle, qui leur est propre/intrinsèque au regard de la proposition 6. Étant donné un espace topologique quelconque, on aimerait, sous certaines conditions, disposer d'une telle structure différentielle. Remarquons que l'on peut déjà dans ce cas parler d'*homéomorphismes* ; fixant $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons :

Proposition et Définition 8. Une variété topologique (ou « C^0 ») de dimension n est un espace topologique M tel que

car $f \circ c :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto f(c(t))$

$$(f \circ c)'(0) = df_{c(0)}(\dot{c}(0)) = df_a(v) = 0$$

[extremum en $t=0$]

$g : U \rightarrow \mathbb{R}^q$
 $x \mapsto (g_1(x), \dots, g_q(x))$ submersion en a

Feuille d'exercices n°10: Multiplicateurs de Lagrange

Exercice 1. Trouver le point de la courbe $y^2 = 4x$ dont la distance vers $(1, 0)$ est minimale.

- a) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ;
- b) en réduisant le problème à l'étude d'une fonction d'une variable.

Exercice 2. Calculer le maximum et le minimum de la fonction $f(x, y, z) = x + y + z$ sur l'ellipsoïde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1\}.$$

Exercice 3. Soit $f(x, y) = 2x^3 + y^4$. Calculer le maximum et le minimum de f sur l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Exercice 4. (Triangle d'aire maximale) Soit $p > 0$. Rappelons la formule de Héron, qui donne l'aire d'un triangle de cotés x, y, z et de périmètre $2p$:

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Justifier que parmi les triangles de périmètre $2p$, il y en a un d'aire maximale et le déterminer.

Exercice 5. Maximiser la fonction

$$f : (x, y, z) \mapsto yz$$

sous les contraintes $y^2 + z^2 = 1$ et $xz = 3$.

Exercice 6. (Contre-exemple aux extrema liés) On définit pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $g_1(x, y, z) = z$ et $g_2(x, y, z) = z - x^2$. On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant les contraintes $g_1(x, y, z) = 0$ et $g_2(x, y, z) = 0$.

- a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une droite que l'on déterminera.
- b) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{C}$, les contraintes ne sont pas qualifiées en (x, y, z) .
- c) Montrer que l'unique point de minimum global de la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y, z) associe

$$f(x, y, z) := (x+1)^2 + y^2$$

sur $\mathcal{C}$ n'est pas solution du système donné par le théorème des extrema liés.

Exercice 7. (Inégalité de Hadamard) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle et on définit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$, $f(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée des vecteurs colonnes $v_1, \dots, v_n$.

- a) Montrer que le maximum de f sur l'ensemble X défini par $\|v_1\| = \dots = \|v_n\| = 1$ est atteint et qu'il est strictement positif.
- b) En utilisant les multiplicateurs de Lagrange montrer que si le maximum de f sur X est atteint en $(v_1, \dots, v_n)$ alors les v_i forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
- c) En déduire l'inégalité de Hadamard

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$$

pour toute famille d'éléments $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 3. Soit $f(x, y) = 2x^3 + y^4$. Calculer le maximum et le minimum de f sur l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Si f a un extremum local en $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D} = \{x^2 + y^2 < 1\}$

alors $df_{(x_0, y_0)} = 0 \Leftrightarrow 6x_0^2 dx + 4y_0^3 dy = 0$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{x_0} f = \partial_{y_0} f = 0$$

$$df_{(x_0, y_0)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire} \quad \Leftrightarrow \quad 6x_0^2 = 4y_0^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = y_0 = 0$$

or $f(0, 0) = 0$

Pause

et 0 n'est pas extremum local

car $f(\varepsilon, 0) = 2\varepsilon^3 > 0$ si $\varepsilon > 0$
 < 0 si $\varepsilon < 0$

Donc extremums locaux sur $\{x^2 + y^2 = 1\} = \{F = 1\}$ $F = x^2 + y^2$

si (x_0, y_0) extremum local alors d'après les extrema liés:

$$df_{(x_0, y_0)} = \lambda dF_{(x_0, y_0)} = \lambda(2x_0 dx + 2y_0 dy)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6x_0^2 \\ 4y_0^3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6x_0^2 & 2x_0 \\ 4y_0^3 & 2y_0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 12x_0^2 y_0 - 8x_0 y_0^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x_0 y_0 (3x_0 - 2y_0^2) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = 0, y_0 = \pm 1$$

ou $y_0 = 0, x_0 = \pm 1$

ou $x_0 = \frac{2}{3} y_0^2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3} y_0^2\right)^2 + y_0^2 = 1 \Rightarrow y_0^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Extrema possibles:

	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	$\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$f(x_0, y_0)$	1	± 2	$\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} = 1$ ou $\frac{1}{2}$

Donc $\max_{x^2 + y^2 \leq 1} f = f(1, 0) = 2$
 $\min_{x^2 + y^2 \leq 1} f = f(-1, 0) = -2$