

Calcul différentiel

Immersion & submersion

Définition Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^k$ Soit $a \in U$.
 $\uparrow$
 $\mathbb{R}^m$ ouvert

a) On dit que f immersion en a si $df_a: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ injective ($\Rightarrow m \leq n$)

b) on dit que f submersion en a si $df_a: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ surjective ($\Rightarrow m \geq n$)

ex: $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ immersion
 $x \mapsto \underbrace{(x, 0)}_{\substack{m \\ k}}$

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ submersion
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-k})$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ submersion en $(x, y) \neq (0, 0)$
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(\theta, \varphi) \mapsto ((R+r \cos \varphi) \cos \theta, (R+r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi)$

où $r \in \mathbb{R}$

immersion.



Théorème a) Soit $f: U \xrightarrow[\text{ouvert}]{\mathbb{R}^m} \mathbb{R}^n$ immersion en $0 \in U$ de classe $\mathcal{C}^k$
 Alors $m \leq n$ et il existe $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme
 $0 \mapsto 0$
 où $0 \in V \subset \mathbb{R}^m$ ouvert
 et $\forall x \in f^{-1}(V)$, $\psi \circ f(x) = (x_1, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m})$
 $\underbrace{(x_1, \dots, x_m)}_{\mathbb{R}^m \text{ ouvert}}$

b) Soit $f: U \xrightarrow[\mathbb{R}^m \text{ ouvert}]{\mathbb{R}^n}$ submersion $\mathcal{C}^k$ en $a \in U$
 alors il existe $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme, $V \subset \mathbb{R}^m$ ouvert
 $0 \mapsto a$
 $(m \geq n)$
 $\hookrightarrow \forall x \in V, \Phi(x) = (x_1, \dots, x_m)$

démo.

a) $f = (f_1, \dots, f_n)$

$df_0 = (df_1|_0, \dots, df_n|_0): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

injectif donc il existe $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$,

$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$h \mapsto (df_{i_1}|_0, \dots, df_{i_m}|_0)$ injectif

$\left((Jac f(0))_{ij} \right)_{\substack{i \in \{i_1, \dots, i_m\} \\ 1 \leq j \leq m}}$ inversible.

Supposons $(Jac f(0))_{1 \leq i, j \leq m}$ inversible

Posez $g(x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n) = (f_1(x), \dots, f_m(x), f_{m+1}(x) - y_{m+1}, \dots, f_n(x) - y_n)$ $\mathcal{C}^k$
 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$dg(0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\underbrace{X \oplus Y}_{\substack{\mathbb{R}^m \\ \mathbb{R}^{n-m}}} \mapsto (df_1|_0(x), \dots, df_m|_0(x), df_{m+1}|_0(x) - y_{m+1}, \dots, df_n|_0(x) - y_n)$

$dg(0)$ injective donc isomorphisme.
 D'après le théorème d'inversion locale, il existe $0 \in V$ ouvert tq
 $g: V \rightarrow g(V) \subset \mathbb{R}^k$ difféo

$$\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in f^{-1}(V), g(f(x_1, \dots, x_m)) = g(f_1(x), \dots, f_m(x), f_{m+1}(x), \dots, f_n(x)) \\ = (f_1(x), \dots, f_m(x), 0, \dots, 0)$$

Or $F: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ difféomorphisme local en 0 $\subset \mathbb{R}^k$
 $(x_i) \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x), y_{m+1}, \dots, y_n)$
 $F^{-1} \circ g \circ f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$

b) $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $xc \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x), x_{m+1}, \dots, x_m)$

C^k , $dh|_a(X) = df|_0(X) \oplus Y$

$Jac(h)_{(0)} \in M_m(\mathbb{R})$, $Jac(h)_{(0)} = \begin{pmatrix} Jac(f)_{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I_m \\ I_{n-m} \end{matrix}$ inversible

Théorème d'inversion locale

$\Rightarrow h \subset C^k$ difféo et $f h^{-1}(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_n)$

En effet $h^{-1}(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_m) \Leftrightarrow y_1 = f_1(x), \dots, y_m = f_m(x), y_{m+1} = x_{m+1}, \dots, y_n = x_n$
 $\Rightarrow f h^{-1}(y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = (y_1, \dots, y_n)$

Généralisation Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ tq $\forall a \in U$, $\text{rang } Jac(f)_a = r$
 $\cap$ ouvert $\mathbb{R}^m$

Théorème du rang constant

Alors il existe $f(a) \in V \subset \mathbb{R}^n$, $\psi: V \rightarrow \psi(V)$ $\left. \begin{matrix} f(a) \mapsto 0 \\ 0 \in W \subset \mathbb{R}^m \end{matrix} \right\} C^k \text{ difféo}$
 $0 \in W \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi: W \rightarrow \varphi(W) \subset U$ $\left. \begin{matrix} 0 \mapsto a \end{matrix} \right\}$
 tq $\forall x \in V$ $\psi \circ f \circ \varphi(x) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$