Si un point $\bar{x} \in \Omega$ est tel que $\nabla f(\bar{x}) = 0$ mais la matrice $D^2 f(\bar{x})$ admet tant des valeurs propres positives que négatives, alors le point $\bar{x}$ est un point selle (ou col), c'est-à-dire un point qui minimise localement f dans une direction et maximise localement dans une autre.

Pour présenter les DL d'ordre supérieur à deux il faut introduire la notaiton des multi-index. Un multi-index α est un vecteur de $\mathbb{N}^n$; on a donc $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout i. Nous utilisons les notations suivantes

$$|\alpha| := \sum_i \alpha_i; \quad \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}; \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}; \quad \alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!.$$

Le résultat concernant les DL à l'ordre m est alors le suivant.

Théorème 1.25. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\bar{x} \in \Omega$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction C^m. Alors on a*

$$f(\bar{x} + h) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha : |\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(\bar{x}) h^\alpha + o(||h||^m).$$

1.5 Théorème d'inversion locale

On présente d'abord un résultat préliminaire. On rappelle d'abord la définition de homéomorphisme.

Définition 1.26. *Une fonction f est dite homéomorphisme de U dans V si f est bijective de U dans V, et f et f^{-1} sont des applications continues.*

On remarque que la définition de continuité, et donc celle de homéomorphisme, ne nécessite pas la structure d'espace vectoriel normé (des espaces topologiques suffiraient). Dans le cas des espaces vectoriels, les applications linéaires qui sont des homéomorphismes (et dont la réciproque serait donc aussi linéaire) jouent un rôle particulier.

Proposition 1.27. *$L \in \mathcal{L}(E, F)$ est un homéomorphisme si et seulement si*
- *L est surjective ;*
- *il existe une constante $c > 0$ telle que $c||h||_E \leq ||L(h)||_F$ pour tout h.*

On regarde maintenant la différentielle de l'inverse, qui est l'inverse de la différentielle. Plus précisément :

Théorème 1.28. *Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F et $f : U \to V$ un homéomorphisme. On suppose que f est différentiable en un point $a \in U$ et que sa différentielle $Df(a)$ est un homéomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$ et*

$$D(f^{-1})(f(a)) = \big(Df(a)\big)^{-1}.$$

On passe ensuite à la notion de difféomorphisme.

$\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

Définition 1.29. *Une fonction f est dite difféomorphisme de U dans V si U et V sont ouverts, si f est bijective de U dans V, f est C^1 et f^{-1} est C^1.*

Montrons un lemme qui sera utilisé dans la preuve du théorème d'inversion locale. On écrit $\mathcal{L}(E)$ pour les applications linéaires continues de E dans E (donc $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$).

Lemme 1.30. *Soit E un espace de Banach. L'ensemble $\mathcal{I}(E) = \{T \in \mathscr{L}(E) \ ; \ T \text{ inversible}\}$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$ et l'application $\mathcal{I}(E) \ni T \mapsto T^{-1} \in \mathscr{L}(E)$ est continue.*

Voici le théorème d'inversion locale.

→ contre-exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ C^1, bijective

mais $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ n'est pas C^1 !

isomorphisme $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

// $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$

Théorème 1.31 (inversion locale)**.** *Soient E (un espace de Banach) $f : U \to \cancel{E}$ (où U est un ouvert de $\cancel{E}$) une fonction de classe C^1 et $a \in U$ tels que $Df(a)$ est un ~~homéomorphisme~~. Alors il existe U' un ouvert qui contient a et V' un ouvert qui contient $f(a)$ tels que f est un difféomorphisme de U' dans V'.*

$\mathbb{R}^n$

Nous avons aussi une version globale du théorème d'inversion locale.

Théorème 1.32 (inversion globale)**.** *Soient E un espace de Banach, $f : U$ ouvert de E à valeurs dans E une fonction de classe C^1. Si f est injective et $Df(x)$ est un homéomorphisme pour tout $x \in U$ alors $f(U)$ est un ouvert et f est un difféomorphisme de U dans $f(U)$.*

1.6 Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites permet de résoudre une équation du type $f(x,y) = 0$ en exprimant une des variables en fonction des autres. Par exemple $y = \varphi(x)$ où φ est une fonction implicite. On sait que φ existe mais on ne la connaît pas explicitement, d'où la terminologie de fonction implicite. On peut montrer ainsi que les zéros d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ se trouvent sur une courbe ; on discutera cela plus en détail quand on parlera de courbes plus tard.

Définissions d'abord la notion de différentielle partielle, qui est similaire à la notion de dérivée partielle.

Définition 1.33. *Soit $f : U$ ouvert de $E \times F$ à valeurs dans G où E, F et G sont des espaces normés. On dit que $f = f(x,y)$ admet une différentielle partielle par rapport à x au point $(a,b) \in U$ si l'application $x \mapsto f(x,b)$ est différentiable en a et on note*

$$D_x f(a,b) = D\big(x \mapsto f(x,b)\big)(a).$$

On définit de même la différentielle partielle par rapport à y et on note

$$D_y f(a,b) = D\big(y \mapsto f(a,y)\big)\cancel{(b)}.$$

Comme dans le cas des dérivées partielles, on peut exprimer la différentielle en fonction des différentielles partielles.

Lemme 1.34. *Soit $f : U$ ouvert de $E \times F$ à valeurs dans G où E, F et G sont des espaces normés. Si f est différentiable en (a,b) alors elle admet des différentielles partielles en (a,b) et on a*

$$Df(a,b)(h,k) = D_x f(a,b)h + D_y f(a,b)k.$$

Voici le théorème des fonctions implicites.

Théorème 1.35 (fonctions implicites)**.** *Soient E, F des espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, $f : U \to F$ une fonction de classe C^1. Soit $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$ et $D_y f(a,b)$ est un homéomorphisme de $\mathscr{L}(F)$. Alors il existe un ouvert W qui contient (a,b), un ouvert V qui contient a et une fonction $\varphi : V \to F$ de classe C^1 tels qu'on a l'équivalence suivante :*

$$(x,y) \in W \text{ et } f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in V \text{ et } y = \varphi(x).$$

Exemples.

a) Considérons le système

$$\begin{cases} 4xy + 2xz + y + 4y^2 = 0 \\ x^3y + xz + 4z - z^2 = 0 \end{cases}$$

au voisinage du point $(0,0,0)$. Le théorème des fonctions implicites s'applique et nous permet d'exprimer y et z en fonction de x. Mais il ne s'applique pas pour exprimer x et y en fonction de z, ni x et z en fonction de y. Par ailleurs, il ne peut pas s'appliquer pour exprimer par exemple x en fonction de y et z car dans le théorèmes des fonctions implicites le nombre de variables qui s'expriment en fonction des autres est toujours égal au nombre d'équations.

Exemples

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$$
$$M \mapsto \exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

exp est $\mathcal{C}^1$, difféomorphisme local en 0.

car $\exp(H) = I_n + H + o(\|H\|)$

$\Rightarrow d\exp_{(0)} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ isomorphisme
$H \mapsto H$

$\Rightarrow$ (théorème d'inversion local) exp C^1 difféo sur un voisinage ouvert de 0.

Mais ce n'est pas un difféomorphisme global car non injectif ($n \geq 2$)

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = I_2 = \exp(0)$$

Remarque. $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ C^1 difféomorphisme
(symétrique) (symétrique définie positive)
$M \mapsto \exp M$

démo : injectivité : $\exp M = \exp M'$

$$\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(e^M - e^\lambda I_n)$$

$\Rightarrow MM' = M'M$

$\Rightarrow \exp(M - M') = I_n \Rightarrow M = M'$.

$$d\exp_{(M)}(H) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_k(H)}{k!} \text{ où } l_k(H) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} M^\alpha H M^{k-1-\alpha}$$

$d\exp_{(M)} : S_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ linéaire de valeurs propres e^{λ_i}, $\frac{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j}$ où λ_i valeurs propres distinctes de M

donc isomorphisme.
donc théorème d'inversion globale : difféomorphisme.

Exercice 1. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et soit f définie sur U par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.

(feuille 6)

Solution.
$$Jac(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \partial_x(x^2-y^2) & \partial_y(x^2-y^2) \\ \partial_x(2xy) & \partial_y(2xy) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$\det Jac f(x,y) = 4x^2+4y^2 \neq 0 \quad si\ (x,y) \neq (0,0).$$

f $\mathcal{C}^1$, théorème d'inversion locale $\Rightarrow$ f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme local en (x,y) $(\forall x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$

$f(x,y) = f(-x,-y) \Longrightarrow$ non injectif.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa différentielle en tout point et vérifier qu'elle est inversible.
2. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$. Justifier que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f^{-1} est lipschitzienne (on travaillera avec la norme 1 de $\mathbb{R}^2$).
4. En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. Calculer $D_p f^{-1}$ où $p = \left(1 - \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi\right)$.

(feuille 6)

1) $\mathrm{Jac}(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2}\cos(y/2) \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) & -1 \end{pmatrix}$

$\det = 1 - \frac{1}{4}\cos(x/2)\cos(y/2) > 0$

2) f injectif ?

$f(x,y) = f(x',y') \iff \begin{cases} \sin(y/2) - x = \sin\left(\frac{y'}{2}\right) - x' \\ \sin(x/2) - y = \sin\left(\frac{x'}{2}\right) - y' \end{cases}$

$\Rightarrow x - x' = \sin(y/2) - \sin(y'/2) \Rightarrow |x - x'| \leq \frac{|y - y'|}{2}$

de même $|y - y'| \leq \frac{|x - x'|}{2}$ (théorème des accroissements finis)

$\Rightarrow |x - x'| = 0 = |y - y'|$

donc le théorème d'inversion globale $\Rightarrow f(\mathbb{R}^2)$ ouvert et $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$ difféo.

4) $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$

Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (X,Y) \iff \begin{cases} \sin y/2 - x = X \\ \sin(x/2) - y = Y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sin\left(\frac{\sin(y/2) - X}{2}\right) - y = Y \quad (*) \\ x = X + \sin(y/2) \end{cases}$$

Théorème du point fixe

$$F(y) = \sin\left(\frac{\sin(y/2) - X}{2}\right) - Y$$

$\exists ! y,\ F(y) = y \iff (*)$

oui car $|F(y) - F(y')| \leq \sup|F'|\ |y-y'|$

$$F'(y) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sin(y/2) - X}{2}\right) \cdot \frac{1}{4}\cos(y/2)$$

$$|F'(y)| \leq \frac{1}{8} < 1$$

donc $\exists y \in \mathbb{R},\ F(y) = y$ ...

5) Df_p^{-1}

où $p = \left(1 - \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi\right)$

$= f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$Df_p^{-1} = Jac f\left(\pi/2, \pi\right)^{-1}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -1 \end{pmatrix}$

<u>Pause</u>.

$D(f \circ g)(a) = Df_{(g(a))} \circ Dg(a)$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ \cup & & \cup & & \cup \\ U & \xrightarrow[g]{} & V & \xrightarrow[f]{} & W \end{array}$$

$Dg(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$Df_{(g(a))} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Cas particulier : $Df^{-1}(f(a)) = Df(a)^{-1}$