Mesure, Intégration, Éléments d'Analyse Fonctionnelle

Université Claude Bernard Lyon 1

Licence de mathématiques troisième année

Parcours Mathématiques générales et applications

Petru Mironescu

2024–2025

Chapitre 10

Espaces L^p

10.0 Aperçu

Nous avons déjà vu l'importance des fonctions intégrables (autrement dit : des fonctions mesurables telles que $\int |f| \, d\mu < \infty$), par exemple comme majorantes dans le théorème de convergence dominée. Dans le langage probabiliste, une fonction intégrable est une fonction f qui a une *espérance* $\mathbb{E}(f) := \int f \, dP$ finie. Une autre quantité importante est la *variance* $V(f) := \int (f - \mathbb{E}(f))^2 \, dP$, qui est finie à condition que $\int f^2 \, dP$ soit finie.

D'autres conditions similaires jouent un rôle important : par exemple, la condition $\int |f|^3 \, dP < \infty$ intervient dans l'étude de la vitesse de convergence dans le *théorème central limite* ; la condition $\int |f|^p \, dP < \infty$, avec $1 < p < 2$, pour la validité du théorème central limite, etc.

Nous allons présenter ici un « chapeau » commun à toutes ces propriétés, qui mène aux *espaces de Lebesgue* $\mathscr{L}^p$, avec $1 \leq p < \infty$:

$$\mathscr{L}^p := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \, ; \, f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p} := \left(\int |f|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

La définition de l'espace $\mathscr{L}^\infty$ fait intervenir une nouvelle notion, celle de $\sup$ *essentiel*, qui est un $\sup$ adapté à la théorie de l'intégration, donc ne tenant pas compte des ensembles négligeables.

Les espaces $\mathscr{L}^p$ sont des espaces vectoriels, et $f \mapsto \|f\|_{L^p}$ vérifie l'inégalité triangulaire, mais n'est pas une norme. Nous allons pallier ce défaut en définissant des cousins des espaces $\mathscr{L}^p$, les espaces L^p ; la définition est conceptuellement compliquée, mais concrètement facile à maîtriser.

Ces espaces sont des espaces normés par $\| \ \|_{L^p}$ (inégalité de Minkowski, théorème 10.26) et complets (théorème de Fatou 10.28).

L'autre notion importante de ce chapitre est celle d'*exposant conjugué* : si $1 \leq p \leq \infty$, le *conjugué* de p est le nombre $1 \leq q \leq \infty$ défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

L'*inégalité de Hölder* (théorème 10.18) affirme que, si $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$, avec p et q conjugués, alors fg est intégrable et

$$\left| \int fg \right| \leq \int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* s'obtient en prenant $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder.

Dans la section 10.4, nous énonçons le *théorème de représentation de Riesz* 10.31, qui, de manière informelle, montre que l'inégalité de Hölder est la seule inégalité possible dans les espaces L^p avec $1 \leq p < \infty$.

Dans tout le chapitre, $(X, \mathscr{T}, \mu)$ *est un espace mesuré* fixé. f, g, etc. : $X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sont des fonctions mesurables*. Même sans mention explicite, la mesurabilité des fonctions concernées est assumée dans chaque énoncé. Le p. p. est relatif à la mesure μ.

Compétences minimales attendues.

a) Comprendre la différence entre $\mathscr{L}^p$ et L^p.
b) Comprendre la définition de $\mathscr{L}^\infty$.
c) Savoir montrer qu'un objet est bien défini pour une classe $f \in L^p$.
d) Savoir utiliser les inégalités de Hölder et Minkowski.
e) Savoir utiliser le théorème de Fatou et son corollaire. $\diamond$

10.1 $\mathscr{L}^p$ versus L^p

Dans cette section, nous définissons les *espaces de Lebesgue* $\mathscr{L}^p$ et L^p et donnons quelques éléments pour comprendre les règles de calcul dans L^p.

10.1 Définition (Espaces de Lebesgue $\mathscr{L}^p$).

a) Si $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int |f|^p\right)^{1/p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

b) Si $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{esssup} |f| := \min\{M \in \overline{\mathbb{R}}\,;\ |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}.$$

c) $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(X, \mu) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}}\,;\ \|f\|_{L^p} < \infty\}$.

10.2 Notation. Une notation alternative, très répandue, pour les normes $\| \ \|_{L^p}$ est $\| \ \|_p$.

Cette notation est cohérente avec les notations des normes usuelles dans $\mathbb{R}^n$: si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et si nous identifions x à une fonction $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, alors $\|x\|_p = \|f\|_{L^p}$, où la seconde norme est calculée par rapport à la mesure de comptage sur $\{1, \ldots, n\}$.

Attention toutefois au danger suivant : si $f : X \to \mathbb{R}$, $\|f\|_\infty$ peut désigner, selon le contexte, soit $\sup |f|$, soit $\operatorname{esssup} |f|$. ◇

10.3 Définition (Espaces de Lebesgue L^p).

a) $L^p = L^p(X, \mu) := \mathscr{L}^p / \sim$. Ici, $\sim$ est l'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p.

b) Si $f \in L^p$, alors nous posons $\|f\|_{L^p} := \|g\|_{L^p}$, où g est une fonction arbitraire de la classe d'équivalence définissant f.

10.4 Remarque.

a) La définition $\|f\|_{L^p} := \|g\|_{L^p}$ est correcte, au sens où $\|g\|_{L^p}$ ne dépend pas du choix de g dans la classe de f, mais ceci demande une preuve ; voir l'exercice 4.22 b). En particulier, ceci implique que, si $g \in \mathscr{L}^p$ et $h \sim g$, alors $h \in \mathscr{L}^p$.

b) Voici une conséquence de l'item a). Nous pouvons définir de la même manière $\|f\|_{L^p}$, $1 \leq p \leq \infty$, si f est une classe d'équivalence de $\{g : X \to \overline{\mathbb{R}}\,;\ g \text{ mesurable}\}$ pour $\sim$. Nous avons alors la définition équivalente de L^p :

$$L^p := \{f\,;\ f \text{ est une classe d'équivalence telle que } \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$ ◇

10.5 Notation. Par abus de notation, et bien qu'un élément de L^p soit une classe d'équivalence et non pas une fonction, nous écrivons

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < \infty.$$

Le sens de cette égalité est que pour tout représentant g de f, l'égalité précédente est vraie si nous remplaçons à droite f par g.

Abus de notation analogue dans L^∞. ◇

Nous continuons par deux remarques essentielles pour comprendre, d'une part, le sens des énoncés concernant les espaces L^p, d'autre part, la façon de définir les opérations dans les espaces L^p.

10.6 Remarque. Lorsqu'il s'agit d'une propriété des espaces L^p, la première question à se poser est si sa preuve (qui fait intervenir des fonctions, et non pas des classes) est indépendante du choix de la fonction dans la classe d'équivalence.

Illustration pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 10.18 avec $p = q = 2$). Pour prouver cette inégalité, nous allons montrer que

$$\int |f_1\, g_1| \leq \left(\int |f_1|^2\right)^{1/2} \left(\int |g_1|^2\right)^{1/2}, \ \forall\, f_1, g_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}. \tag{10.1}$$

En prenant, dans (10.1), f_1 dans la classe de f et g_1 dans la classe de g, nous obtenons

$$\int |f_1\, g_1| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $f_1\, g_1$ est dans la classe de $f\, g$; or, ceci découle de l'exercice 10.11 b).

10.7 Remarque.

a) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p$, alors la proposition 6.48 (appliquée à $|f|^p$) et la remarque 6.47 montrent qu'il existe, dans la classe d'équivalence de f, une fonction g finie *partout*.

b) Si $f \in \mathscr{L}^\infty$, soit $A := \{x \in X\, ; |f(x)| > \operatorname{esssup} f\}$. Alors $A \in \mathscr{T}$ est négligeable, d'où $g = f\, \chi_{A^c}$ est dans la classe de f. Notons que g est, par construction, bornée, en particulier finie *partout*.

c) Ainsi, lorsque nous travaillons avec une classe f de L^p, nous pouvons toujours considérer un représentant fini *partout* (et, si $p = \infty$, borné).

d) En particulier, si $f, g \in L^p$ alors nous pouvons définir la classe $f + g$ comme celle de $f_1 + g_1$, avec f_1 (respectivement g_1) dans la classe de f (respectivement g) finie partout. Dans l'esprit de la remarque 10.6, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la classe $f + g$ obtenue ne dépend pas du choix de f_1 et g_1. ◇

La remarque suivante montre que l'espace $L^p(X, \overline{\mu})$ n'est pas, dans un sens à préciser, plus riche que l'espace $L^p(X, \mu)$.

10.8 Remarque. Nous pouvons identifier *de manière naturelle* les classes d'équivalence des fonctions $\mathscr{T}$-mesurables et $\overline{\mathscr{T}}$-mesurables. En effet, soit $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable. Alors (proposition 4.19 a)) il existe une fonction $\mathscr{T}$-mesurable $g_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que $f_1 = g_1$ μ-p. p. (ou, ce qui est équivalent, telle que $f_1 = g_1$ $\overline{\mu}$-p. p.).

Notons : f la classe de f_1 par rapport à $(X, \overline{\mathscr{T}}, \overline{\mu})$, g la classe de g_1 par rapport à $(X, \overline{\mathscr{T}}, \overline{\mu})$, G la classe de g_1 par rapport à $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Par choix de g_1, nous avons $f = g$.

Par ailleurs, nous avons $G \subset g$ (vérifier). L'application $f \mapsto G$ est bien définie et bijective, de réciproque $G \mapsto g$ (vérifier).

Cette identification naturelle s'étend aux espaces L^p : si $f_1 \in \mathscr{L}^p(X, \overline{\mu})$, alors les classes respectives satisfont $f \in L^p(X, \overline{\mu})$ et $G \in L^p(X, \mu)$, ce qui donne une bijection naturelle, $f \mapsto G$, entre $L^p(X, \overline{\mu})$ et $L^p(X, \mu)$. Cette bijection préserve la norme : $\|f\|_{L^p(X,\overline{\mu})} = \|G\|_{L^p(X,\mu)}$ (vérifier).

En particulier, nous pouvons identifier $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$ à $L^p(\mathbb{R}^n, \nu_n)$. ◇

Exercices

Cet exercice donne quelques propriétés simples de $\| \ \|_{L^p}$. L'item d) est particulièrement important de point de vue théorique.

10.9 Exercice.

a) $\|tf\|_{L^p} = |t|\,\|f\|_{L^p}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).

b) Si $f = g$ p. p., alors $\|f - g\|_{L^p} = 0$ et $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$.

c) $\|f\|_{L^p} = 0$ si et seulement si $f = 0$ p. p.

d) La définition de $\|f\|_{L^\infty}$ est correcte, au sens suivant. Soit $A := \{M \in [0, \infty] \,;\, |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}$. Montrer que A est non vide et a un plus petit élément, m. Cet m est le plus petit nombre C de $[0, \infty]$ avec la propriété $|f(x)| \leq C$ p. p., et donc $m = \|f\|_{L^\infty}$.

e) $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ pour $p = 1$ et $p = \infty$. (Ici, $f, g : X \to \mathbb{R}$.) ◇

La définition de $\| \ \|_{L^\infty}$ est assez absconse. L'exercice suivant donne un cas où $\|f\|_{L^\infty} = \sup |f|$.

10.10 Exercice. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_U$. Si $f \in C(U)$, montrer que $\|f\|_{L^\infty} = \sup\limits_U |f|$. ◇

L'exercice suivant montre que la relation $\sim$ « commute » avec les opérations sur les fonctions.

10.11 Exercice. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons des fonctions $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (pas nécessairement mesurables). Montrer que la relation d'équivalence « $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p. » a les propriétés suivantes.

a) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f + t\,g \sim f_1 + t\,g_1$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (à condition que les fonctions soient finies en tout point).

b) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f\,g \sim f_1\,g_1$.

c) Si $f \sim g$ et si $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, alors $\Phi \circ f \sim \Phi \circ g$.

d) Dans cette question, $X := \mathbb{R}^n$ et $\mu := \lambda_n$. Soit $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall\, x, h \in \mathbb{R}^n$. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall\, h$. ◇

Dans le même esprit, nous mentionnons la propriété suivante, utilisée dans la définition du produit de convolution (dans le chapitre 11).

10.12 Exercice. Nous munissons $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue. Soient $f, g, f_1, g_1 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $h \sim h_1$, où

$$h(y) = f(x-y)\, g(y),\ h_1(y) = f_1(x-y)\, g_1(y),\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n. \qquad \diamond$$

L'exercice suivant introduit des espaces *très importants*, les *espaces* ℓ^p.

10.13 Exercice (Espaces ℓ^p)**.**

a) Si μ est la mesure de comptage, alors l'égalité p. p. équivaut à l'égalité. Ainsi, nous pouvons identifier naturellement $\mathscr{L}^p$ et L^p.

   Si $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, alors nous définissons

   $$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \mathscr{L}^p = L^p,\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty.^\dagger$$

b) Si $(a_n)_n$ est une suite indexée sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que

   $$\|(a_n)_n\|_{\ell^p} = \begin{cases} \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_n |a_n|, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

c) Montrer que si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$. De plus, ces inclusions sont « continues » : si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, alors $\|(a_n)_n\|_{\ell^r} \leq \|(a_n)_n\|_{\ell^p}$.

d) Soit $(a_n)_n \in \ell^p$, avec $p < \infty$. Montrer que pour tout $r > p$ nous avons $\lim_{s\to r} \|(a_n)_n\|_{\ell^s} = \|(a_n)_n\|_{\ell^r}$.

e) Si $1 \leq r < \infty$ et $(a_n)_n$ est une suite arbitraire, alors $\lim_{s \searrow r} \|(a_n)_n\|_{\ell^s} = \|(a_n)_n\|_{\ell^r}$. $\diamond$

Cet exercice est une suite « concrète » de la remarque « abstraite » 10.8.

10.14 Exercice.

a) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. Montrer que toute classe d'équivalence contient un représentant borélien.

b) Même propriété si à la place de $\mathbb{R}^n$ nous considérons une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$.

c) Généralisation ? $\diamond$

Un autre exercice *fondamental*. Nous le commenterons à sa fin.

10.15 Exercice. Nous supposons μ *finie*.

a) Montrer que si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $L^\infty \subset L^{p_2} \subset L^{p_1} \subset L^1$.

b) Soit $f \in L^p$, avec $p > 1$. Montrer que pour tout $1 \leq r < p$ nous avons $\lim_{s\to r} \|f\|_{L^s} = \|f\|_{L^r}$. $\diamond$

10.16 Remarque (Inclusions entre les espaces L^p)**.** *En général*, il n'y a pas de relation d'inclusion entre L^p et L^q, avec $p \neq q$: nous n'avons pas $L^p \subset L^q$.

Il existe deux *exceptions notables*.

a) Si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$.

   Les espaces ℓ^p croissent avec p.

†. Nous définissons de même $\ell^p(A)$, avec A a. p. d.

b) Si μ est finie et $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $L^1 \supset L^{p_1} \supset L^{p_2} \supset L^\infty$.

Si μ est finie, les espaces L^p décroissent avec p.

Pour l'item a), voir l'exercice 10.13 c) ; pour l'item b), l'exercice 10.15 a).

10.2 Inégalité de Hölder

Cette section est dédiée à la preuve de l'*inégalité de Hölder* et à deux de ses « réciproques » qui montrent que cette inégalité ne peut être améliorée. La première « réciproque », la proposition 10.19, servira dans la preuve de l'inégalité de Minkowski dans la section 10.3 ; elle intervient dans de nombreuses preuves « par dualité » en analyse fonctionnelle. La deuxième « réciproque », la proposition 10.20, intervient également dans des preuves d'analyse plus avancée, comme celle du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Commençons par une définition essentielle dans ce contexte.

10.17 Définition (Exposants conjugués)**.** Les nombres $p, q \in [1, \infty]$ sont *conjugués* (ou *exposants conjugués*) si et seulement si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.† ‡

10.18 Théorème (Inégalité de Hölder)**.** Si p, q sont conjugués, alors

$$\|f\, g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q}, \ \forall\, f, g \textit{ (inégalité de Hölder)} . \tag{10.2}$$

En particulier, nous avons

$$\|f\, g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}\, \|g\|_{L^2}, \ \forall\, f, g \textit{ (inégalité de Cauchy-Schwarz)} . \tag{10.3}$$

Les inégalités s'entendent pour des fonctions ou pour des classes d'équivalence.

10.19 Proposition (Formule de dualité L^p–L^q (I))**.** Soient p, q exposants conjugués.

a) Si $1 \leq p < \infty$, alors nous avons

$$\|f\|_{L^p} = \sup\left\{\int f\, g\, ;\, g \in \mathscr{L}^q,\ \|g\|_{L^q} \leq 1\right\},\ \forall\, f \in \mathscr{L}^p. \tag{10.4}$$

De plus, nous pouvons remplacer dans (10.4) le $\sup$ par $\max$ et considérer uniquement des fonctions g telles que $f\, g \geq 0$.

†. Notons que nous ne pouvons pas avoir en même temps $p = \infty$ et $q = \infty$. Si, par exemple, $p < \infty$, alors $q = p/(p-1)$. Si nous avons en même temps $q < \infty$, alors, par symétrie, $p = q/(q-1)$.

‡. q est désigné comme le conjugué de p (et réciproquement).