

Analyse fonctionnelle

1) Coefficients de Fourier

Definition. Soit $f \in L^1([0, 2\pi[)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$

On note $e_n(x) = e^{inx}$.

2) Espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi[)$

Proposition. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale pour :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f} \cdot g$$

démo: $\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n=m \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)x} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$

Théorème de Fatou et égalité de Parseval

1) $\forall f \in L^2([0, 2\pi[)$, $\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow +\infty}} \sum_{k=-N}^M c_k(f) e_k = \overline{L^2} f$

c-a-d: $\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \left\| f - \sum_{k=-N}^M c_k(f) e_k \right\|_{L^2} = 0$

2) $\forall f \in L^2([0, 2\pi[)$, $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$

démo: 1) $\Rightarrow$ 2)

Notation $S_{N,M}(f) = \sum_{k=-N}^M c_k(f) \cdot e_k$

(*) $\|f\|_{L^2}^2 = \underbrace{\|f - S_{N,M}(f)\|_{L^2}^2}_{\xrightarrow{N,M \rightarrow \infty} 0} + \|S_{N,M}(f)\|_{L^2}^2 = \sum_{k=-N}^M |c_k(f)|^2$

car $S_{N,M}(f)$ = projeté orthogonal de f sur $\text{Vect}\{e_k : -N \leq k \leq M\}$, $c_k(f) = \langle e_k, f \rangle$

1) Soit $\varepsilon > 0$

$\exists g \in C_c^\infty([0, 2\pi[)$, $\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon$ (par convolution)

$$\|f - S_{N,M}(f)\|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2} + \|g - S_{N,M}(g)\|_{L^2} + \underbrace{\|S_{N,M}(g - f)\|_{L^2}}_{\leq \|g - f\|_{L^2}}$$

$$< 2\varepsilon + \|g - S_{N,M}(g)\|_{L^2}$$

Or g se prolonge en g C^∞ sur $\mathbb{R}$ 2π -périodique ($\forall x, g(x+2\pi) = g(x)$)

Or (admis) il existe P polynôme trigonométrique / $\|P - g\|_\infty < \varepsilon$

$$P(x) = \sum_{d=-\alpha}^{\beta} a_d e^{idx} \quad \text{pour certains } \alpha, \beta \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|g - S_{N,M}(g)\|_{L^2} &\leq \|g - P\|_{L^2} + \|P - S_{N,M}(P)\|_{L^2} + \|S_{N,M}(P - g)\|_{L^2} \\ &\leq 2\|g - P\|_{L^2} + \|P - S_{N,M}(P)\|_{L^2} \\ &\leq \underbrace{2\|g - P\|_{\infty}}_{< 2\varepsilon} + \underbrace{\|P - S_{N,M}(P)\|_{L^2}}_{= 0 \text{ si } N > \alpha, M > \beta} \end{aligned}$$

Donc $\|f - S_{N,M}(f)\|_2 < 4\varepsilon$ si $N > \alpha, M > \beta$

Proposition. Soit f 2π périodique sur $\mathbb{R}$ ($\forall x, f(x+2\pi) = f(x)$).

Si $f \in L^1([0, 2\pi[)$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f = \int_0^{2\pi} f$

demo: (since $a > 0$) $\int_0^{a+2\pi} f = \int_0^a f + \int_a^{a+2\pi} f = \int_0^{2\pi} f + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f$

Lemme de Riemann-Lebesgue: Soit $f \in L^1([0, 2\pi[)$, alors $C_n(f) \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$

démo. $|c_n(f)| \leq \|f\|_{L^1}$

si $f = \chi_{]a,b[}$ avec $0 < a < b < 2\pi$

$$n \neq 0 \quad c_n(f) = \int_a^b e^{-inx} f(x) dx = \int_a^b e^{-inx} = \frac{-1}{in} [e^{-inx}]_a^b = \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{in} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Soit $f \in L^1$, Soit $\varepsilon > 0$, $\exists$ n en escaliers, $\|f - h\|_{L^1} < \varepsilon$

$$\Rightarrow c_n(f) = c_n(f-h) + c_n(h) \Rightarrow |c_n(f)| \leq |c_n(f-h)| + |c_n(h)|$$

$$\leq \|f-h\|_{L^1} + |c_n(h)|$$

$$\leq \varepsilon + \underbrace{|c_n(h)|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Noyan de Dirichlet

Definition. $D_m(x) = \sum_{k=-n}^m e^{ikx} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

Propriétés: a) 2π -périodique

$$b) \quad D_m(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(x/2\right)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2m+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

c) $\int_0^\pi D_m = \int_{-\pi}^0 D_m = \pi$

Théorème:
(Dirichlet)

$\forall f, S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$

Si $f \in C^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi[$, a

$\forall f, S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k \frac{e^{ikx}}{k}$
 Si f C^1 par morceaux sur $]0, 2\pi[$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

$$\text{ou } f(x^+) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} f(y), \quad f(x^-) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y < x}} f(y)$$



$\exists a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_N = 2\pi, \forall 0 \leq k \leq N-1, f \in C^1 \text{ sur }]a_k, a_{k+1}[.$

